G. Fels
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10

Mathematik für Physiker III
Übungsblatt 6

Aufgabe 23:

(a) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$x^2 + y^2 - u^2 - v^2 = 0 \qquad x^2 + 2y^2 + 3u^2 + 4v^2 = 5$$

lokal durch differenzierbare und positive Funktionen $u(x, y)$ sowie $v(x, y)$ aufgelöst werden kann. Um welchen Punkt (x_0, y_0) ist das möglich? [3]

(b) Ist es möglich ohne die Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$ explizit zu kennen deren partiellen Ableitungen nach x und y zu berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort.
Hinweis: Kettenregel [4]

Aufgabe 24: Betrachten Sie die Menge $U = \{(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum \phi_j \neq -1\}$ und die Abbildung

$$f : U \to \mathbb{R}^3, \quad f \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} := \frac{1}{1 + \phi_1 + \phi_2 + \phi_3} \cdot \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}$$

(a) Existiert die Fréchetableitung Df von f für alle $z \in U$? Wenn ja (Begründung!) dann berechnen Sie sie. [2]

(b) Zeigen Sie, dass f injektiv auf U ist und bestimmen Sie die Teilmenge $f(U)$. Geben Sie die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(U) \to U$ explizit an. [4]

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrabbildung differenzierbar ist und berechnen Sie Df^{-1} in allen Punkten $z \in f(U)$ [2]

Aufgabe 25: Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := z^3 \sin(xy) + zxy^2$ eine zweifach stetig partiell differenzierbare Funktion. Geben Sie explizit das Taylorpolynom T_f^2 von f im Punkt $(1, \pi, 1)$ an. Schreiben Sie ferner dieses Taylorpolynom als ein Ausdruck, in dem sowohl der Gradient wie auch die Hessematrix von f vorkommt. [5]

Aufgabe 26:* Es sei E ein Banachraum und $\mathrm{GL}(E)$ die Menge aller stetigen und invertierbaren linearen Abbildungen $E \to E$.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{GL}(E)$ eine offene Teilmenge von $(\mathcal{L}(E, E), \| \ \|_{op})$ ist.
Hinweis: $(1 - x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. Versuchen Sie um das Element $\mathrm{Id} \in \mathrm{GL}(E)$ eine Normkugel zu konstruieren, die ganz in GL(E) enthalten ist. [5]*

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $inv : \mathrm{GL}(E) \to \mathrm{GL}(E)$, $B \mapsto B^{-1}$ Frechet-differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $D(inv)(A)$ in einem beliebigen Punkt $A \in \mathrm{GL}(E)$. [5]*

$\mathbf{\Sigma} = 20$

Abgabe: Montag, 7.12.2009, zu Beginn der Vorlesung.