G. Fels
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10

Mathematik für Physiker III
Übungsblatt 7

Aufgabe 27:

(a) Bestimmen Sie die Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, [3]

$$f(x, y) := (4x^2 - y^2) \exp^{-x^2-4y^2} .$$

(b) Berechnen Sie explizit die Terme von Ordnung 3 in der Taylorentwicklung von f um den Punkt $(0, 1)$. [3]

Aufgabe 28: (Vorarbeit zu Euler-Lagrange) Es sei E die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Kurven $x : [0, s] \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

(a) E is ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. (Definieren Sie zunächst was die Addition und Skalarmultiplikation in E ist) [2]

(b) Zeigen Sie, dass

$$\|x\| := \sup_{t\in[0,s]} \|x(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{t\in[0,s]} \|\dot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{t\in[0,s]} \|\ddot{x}(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

eine Norm auf E ist, die E zu einem Banachraum macht. Hierbei bedeutet $\dot{x}$ (bzw, $\ddot{x}$) die erste (bzw. zweite) Ableitung von x nach t. [4]

Aufgabe 29: Es sei $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m} c_\alpha x^\alpha$ eine Potenzreihe. Sei weiter $(z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$, so dass die Menge $\{|c_\alpha||z^\alpha| : \alpha \in \mathbb{N}_0^m\}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass dann $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m} c_\alpha x^\alpha$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $|x_j| < |z_j|$ für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ absolut konvergiert.
Hinweis: Versuchen Sie diese Aussagen für Potenzreihen in einer Variable zu beweisen (Stichwort: geometrische Reihe) und dann adaptieren Sie diesen Beweis für den Fall der mehreren Veränderlichen. [6]

Aufgabe 30:* Es seien E, E' Banachräume und $U_E \subset E$ eine offene Teilmenge.

(a) Gegeben seien hinreichend oft differenzierbare Abbildungen $F : U_E \to E'$, $\gamma : (a, b) \to U_E$. Berechnen Sie die erste, zweite und dritte (totale) Ableitung der Verkettung $F \circ \gamma : (a, b) \to E'$. [4]*

(b) In dem Fall $\gamma(t) = x + th$ mit $x, h \in E$, $t \in (a, b) \supset [0, 1]$ berechnen Sie die k-te Ableitung von $F \circ \gamma$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. [2]*

(c) Für $f \in C^{k+1}(U_E, E')$ sei $f(x+h) = T^k_{x,f}(h) + R^k_{x,f}(h)$ die Taylorentwicklung von f um $x \in U_E$, wobei $R^k_{x,f}(x)$ das Restglied ist, siehe Vorlesungsskript.

Beweisen Sie die Abschätzung

$$\|R^k_{x,f}(h)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|D^{k+1}f\ (x+th)\| \cdot \|h\|^{k+1}$$

in dem Sie wie folgt vorgehen:

• (Yoga auf Banachräumen) Die höheren Ableitungen von $f : U_E \to E'$, berechnet in einem Punkt $x \in U_E$, liegen in den folgenden Räumen: $Df_x \in \mathcal{L}(E, E')$, $D^2 f_x \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, E'))$, $D^3 f_x \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, E')))$, etc. Wir schreiben dann abkürzend $D^2 f_x(h_1, h_2) := (D^2 f_x(h_1))(h_2)$, $D^3 f_x(h_1, h_2, h_3) := \big((D^3 f_x(h_1))(h_2)\big)(h_3)$,... und für beliebiges k sowie beliebige Vektoren $h_1, \dots, h_k \in E$: $D^k f_x(h_1, \dots, h_k) := (..((D^k f_x(h_1))(h_2))\dots)(h_k)$. Die so definierte Abbildung $D^k f_x : E \times \dots \times E \to E'$, $(h_1, \dots, h_k) \mapsto D^k f_x(h_1, \dots, h_k)$ ist eine k-fach multilineare Abbildung. Zeigen Sie (Induktion über k), dass die folgende Anschätzung gilt:

$$\|D^k f_x(h_1, \dots, h_k)\|_{E'} \leq \|D^k f_x\|_{op} \cdot \|h_1\|_E \cdots \|h_k\|_E$$

[3]*

• Definieren Sie $\phi(t) := f \circ \gamma(t)$ mit $\gamma(t) := x + th$ und betrachten Sie für ein beliebiges aber festes $y \in [0,1]$ die Hilfsfunktion

$$\psi^y(z) := \phi(y) - \phi(z) - \frac{(y-z)}{1!} \cdot D\phi_z - \frac{(y-z)^2}{2!} \cdot D^2\phi_z - \dots - \frac{(y-z)^n}{n!} \cdot D^n\phi_z$$

Berechnen Sie die Ableitung von ψ^y an der Stelle $z \in [0,1]$. (Schreibweise wie in 1.4.3.) [3]*

• Wenden Sie den Mittelwertsatz (1.4.6 in der Vorlesungszusammenfassung mit $\nu(t) = (\sup_{z\in[0,1]} \|D\psi^1(z))\|) \cdot t$) auf die Funktion $\psi^1 : [0,1] \to E'$ an und zeigen Sie, dass die so gewonnene Abschätzung die zu beweisende Abschätzung impliziert. [3]*

• Zeigen Sie, dass für $E = \mathbb{R}^m$ sowie $x, h \in \mathbb{R}^m$ unter Verwendung der Multiindexschreibweise die folgende Identität besteht:

$$\sum_{|\alpha|=d} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f\ (x) = \frac{D^k f(x)(\overbrace{h, \dots, h}^{k-mal})}{k!}$$

Hinweis: für eine festes $h \in \mathbb{R}^m$ gilt $D^k f_x(h, \dots, h) = \left.\frac{d^k}{dt^k}\right|_0 (t \mapsto f(x+th))$ [3]*

$\mathbf{\Sigma} = 18$

Abgabe: Montag, 14.12.2009, zu <u>Beginn</u> der Vorlesung.