G. Fels
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 8

Aufgabe 31: Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind abgeschlossen, und welche sind abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten? Zeichen Sie, wenn möglich, die vorgegebenen Menge und und geben Sie gegebenfalls die Dimension der Mannigfaltigkeit an.

(a) $M_c := \{x \in \mathbb{R}^4 : g(x) = c$ mit $g(x, y, z, w) = (x^2 + y\ ,\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + y)$, $c \in \mathbb{R}^2$ beliebig. [2]

(b) $N := \{(s^6, s^3, t) : s, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ [3]

(c) $L := \{(\sin(2t),\ \sin(t)) : t \in (-\pi/2, 3\pi/2)\}$ [3]

(d) $P := \{x^2 - y^3 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ [2]

Aufgabe 32: Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel alle lokalen Maxima und Minima von $f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + x_2 - 4x_3$ auf dem Durschnitt M der Ebene $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ mit dem Ellipsoid $\{x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 = 1\}$. [5]

Aufgabe 33: Betrachten Sie eine Kette der Länge $l > 2$. Die Kette ist aufgehängt an den Punkten $(-1, 0)$ und $(1, 0)$. Dazwischen wird ihre Lage durch den Graphen einer zweimal stetig differenzierbare Funktion $x : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ beschrieben. Die Funktion x ist dadurch bestimmt, dass das Energiefunktional

$$E(x) := -\int_{-1}^{1} x(t)\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\ dt$$

minimal an der Stelle x ist.

a) Welcher Nebenbedingung muss die Funktion x gehorchen? [2]

b) Leiten Sie eine Differentialgleichung für die Funktion x her. [5]

c) Machen Sie den Ansatz

$$x(t) = a\cosh(bt) + c,$$

um die Differentialgleichung aus (b) zu lösen und bestimmen Sie die Konstanten. [3]

$\mathbf{\Sigma} = 25$

Abgabe: Montag, 11.01.2010, zu Beginn der Vorlesung.