G. Fels
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10

Mathematik für Physiker III
Übungsblatt 9

Aufgabe 34: Es sei $n > 1$ eine natürliche Zahl, E der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$, versehen mit der Operatornorm $\|A\|_{op} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} \|Ax\|$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $A \in E$ die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

gegen ein $G \in E$ konvergiert. Hierbei bezeichnet $A^k = A \cdot A \cdots A$ (k-Mal) die Matrizenmultiplikation. Wie in der Vorlesung, schreiben wir $\exp A$ (oder e^A) für den Grenzwert G. [4]

(b) Zeigen Sie, dass für jedes $A \in E$, $s, t \in \mathbb{K}$ die Identität

$$\exp(t + s)A = \exp tA \cdot \exp sA$$

gilt. [3]

(c) Gilt für beliebige Matrizen $A, B \in E$ die Identität "$\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$" ? [3]

(d) Berechnen Sie die Ableitung von $\mathbb{K} \to E$, $t \mapsto \exp tA$ an der Stelle t_0 wobei $A \in E$ beliebig ist. [2]

(e) Es seien jetzt $A, B, C : \mathbb{R} \to E$ stetig differenzierbare Kurven. Zeigen Sie, dass dann auch $\delta : \mathbb{R} \to E$, $\delta(t) := A(t) \cdot B(t)^2 \cdot C(t)$ stetig differenzierbar ist und berechnen Sie ihre Ableitung an einer Stelle t_0. [3]

Aufgabe 35: Geben Sie explizit alle *reellen* Lösungen der folgenden linearen Differentialgleichungen an:

(a)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 3y(t) \end{aligned}$$

[3]

(b)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \quad\quad -y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Hinweis: Ist $z(t) = u(t) + iv(t)$ eine komplexe Lösung der DGL $\dot{z} = A \cdot z$, wobei A eine <u>reelle</u> Matrix ist, so sind auch $\Re z(t)$ und $\Im z(t)$ Lösungen der DGL $\dot{z} = A \cdot z$. Hierbei bezeichnet $\Re z$ den Realteil und $\Im z$ den Imaginärteil der komplexen Zahl z. [3]

(c)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= \phantom{x_1(t) + {}} x_2(t) + x_3(t)\\ \dot{x}_3(t) &= \phantom{x_1(t) + x_2(t) + {}} x_3(t)\end{aligned}$$

[3]

(d) Lösen Sie das AWP [3]

$$\dddot{x} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = 1, \qquad x(0) = \dot{x}(0) = 1,\ \ddot{x}(0) = 2$$

Aufgabe 36:

a) Geben Sie ein Beispiel einer linearen gewöhnlichen DGL mit nichtkonstanten Koeffizienten sowie einer nichtlinearen gewöhnlichen DGL an. [2]

b) Es sei $C^k(I)$ der Vektoraum $\mathbb{K}$-wertige k-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Es seien weiter $\psi_1, \dots, \psi_{k+1} \in C^k(I)$. Zeigen Sie: Gibt es $t_0 \in I$, so dass

$$\det \begin{pmatrix} \psi_1(t_0) & \psi_2(t_0) & \dots & \psi_{k+1}(t_0) \\ \psi_1'(t_0) & \psi_2'(t_0) & \dots & \psi_{k+1}'(t_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \psi_1^{(k)}(t_0) & \psi_2^{(k)}(t_0) & \dots & \psi_{k+1}^{(k)}(t_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

so sind $\psi_1, \dots, \psi_{k+1}$ linear unabhängig in $C^k(I)$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $e^{a_1 t}, \dots e^{a_m t}$ linear unabhängig sind (als Elemente in $C^\infty(\mathbb{R})$) wenn $a_j \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden sind. [4]

$\mathbf{\Sigma}$ =33

Abgabe: Montag, 18.01.2010, zu Beginn der Vorlesung, diesmal ausnahmsweise 12.00-13.30 in M2.