G. Fels
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10

Mathematik für Physiker III
Übungsblatt 10

Aufgabe 37:

(a) Berechnen Sie die komplexen Zahlen $(2-i)^{-3}$, $\sin(4i)$ und $(3-2i)/(i-1)$. Geben Sie eine geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation $z \cdot w$ an. [2]

(b) Zeigen Sie nur unter Verwendung der Definition der Holomorphie, dass jede komplexe Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (w-w_0)^k$ $\mathbb{C}$-differenzierbar in jedem Punkt $z_0 \in B_r(w_0)$ ihres Konvergenzbereiches ist. [4]

(c) Beweisen Sie die Identitäten

$$e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z), \qquad z = |z|e^{i\varphi(z)},$$

für alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, wobei $\varphi(z)$ den Winkel zwischen der positiven reellen Halbachse und der komplexen Zahl z (betrachtet als ein Vektor in $\mathbb{R}^2$) bezeichnet. Erläutern Sie ob man $\varphi(0)$ 'sinnvoll' interpretieren kann. [3]

Aufgabe 38: Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale $\int_\gamma f(z)\ dz$ entlang der vorgegebenen Wege:

a) $f(z) = |z|^3$ entlang des geschlossenen Weges, der durch die Strecke von -1 nach 1 und den oberen Einheitshalbkreis gegeben ist. [2]

b) $f(z) = z^3$ entlang des geschlossenen Weges, der durch die Strecke von -1 nach 1 und den oberen Einheitshalbkreis gegeben ist. [2]

c) $f(z) = \bar{z}^n$, $n \in \mathbb{Z}$ entlang des positiv orientierten Einheitskreises. [2]

d) $f(z) = \frac{1}{z}$ entlang des positiv orientierten Einheitskreises, der negativ orientierten Kreislinie mit Radius 2 sowie entlang des positive orientierten Randes des Quadrats mit den Ecken $\pm 1 \pm i$. [5]

Aufgabe 39: Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare Kurve und $\alpha : [c,d] \to [a,b]$ ein Diffeomorphismus (bijektiv, α, α^{-1} stetig differenzierbar). Es sei $\delta := \gamma \circ \alpha$. Zeigen Sie, dass dann für jede stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $\gamma([a,b]) \subset U$

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \begin{cases} \int_\delta f(z)\ dz & \text{falls } \alpha' > 0 \\ -\int_\delta f(z)\ dz & \text{falls } \alpha' < 0 \end{cases}$$

[6]

$\mathbf{\Sigma} = 26$

Abgabe: Montag, 25.01.2010, zu Beginn der Vorlesung.