G. Fels
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10

Mathematik für Physiker III
Übungsblatt 11

Aufgabe 40: Unter Verwendung des Satzes von Liouville beweisen Sie, dass jedes komplexe Polynom $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$ die Produktdarstellung $P(z) = a_n \prod_{k=1}^{n}(z - b_k)$ hat.
Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass P eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. [6]

Aufgabe 41:

(a) Es sei $f : U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, die in einem Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ besitzt. Wenn $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ gilt, ist dann f in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar? [2]

(b) In welchen Punkten ist die Abbildung $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z \cdot \overline{z}$ $\mathbb{C}$-differenzierbar ? [2]

(c) Es sei $E := \{x + iy \in \mathbb{C} : 2x^2 + 5y^2 = 4\}$ eine Ellipse. Berechnen Sie das Integrall [3]

$$\int_{\partial E} \frac{\sin(u)}{u - i/2}\, du\ .$$

(d) Es sei $R := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) + 2 \leq 1,\ \Im(z) \leq 1\}$ ein Rechteck. Berechnen Sie [3]

$$\int_{\partial R} \frac{\cos^2(w)}{w + \pi}\, dw\ .$$

Aufgabe 42: Es sei $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Exponentialfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$ gilt. [2]

(b) Zeigen Sie, dass für eine holomorphe und nichtkonstante Funktion $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche die Gleichung $\varphi(z + w) = \varphi(z)\varphi(w)$ für alle $w, z \in \mathbb{C}$ erfüllt, $\varphi(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus 0$ gilt. [9]*

(c) Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Umgebung $U(w) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existiert, so dass das Urbild $\exp^{-1}(U(w))$ eine disjunkte Vereinigung $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} W_j$ von zusammenhängenden offenen Teilmengen $W_j \subset \mathbb{C}$ ist, so dass die Einschränkungen $\exp : W_j \to U(w)$ biholomorph (d.h., holomorph, bijektiv und die Umkerabbildung $U(w) \to W_j$ ebenfalls holomorph ist) für alle $j \in \mathbb{Z}$ sind. [5]

(d) Betrachet Sie die Kurve $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(t) = e^{it}$. Gibt es eine stetige Kurve $\eta : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$, so dass $\eta(0) = 2m\pi i$ und $\exp(\eta(t)) = \gamma(t)$ für alle $t \in [0, 4\pi]$ gilt? Gegebenfalls berechnen Sie die Differenz $\eta(4\pi) - \eta(0)$. [4]

Alle Antworten sind zu begründen.

$\mathbf{\Sigma} = 27$

Abgabe: Montag, 01.02.2010, zu Beginn der Vorlesung.