G. Fels
Universität Tübingen

Wintersemester 2009/10

Mathematik für Physiker III

Übungsblatt 12

Aufgabe 43: Es seien $f, g : U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, $U_{\mathbb{C}}$ ein Gebiet. Beweisen Sie ohne den Mittelwertsatz zu benutzen, dass $f' = g'$ auf $U_{\mathbb{C}}$ die Gleichheit $g = f + const$ auf $U_{\mathbb{C}}$ impliziert. [4]

Aufgabe 44: Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto \exp(1/z)$ in jeder punktierten Kreisscheibe $B_\varepsilon^\times(0)$ alle Werte aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ annimmt, ohne den Satz von Picard zu benutzen. [3]

Aufgabe 45: Es seien $f, g : U \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen, $g \not\equiv 0$. Zeigen Sie, dass $f/g : U \setminus \{g = 0\}$ eine meromorphe Funktion ist, die sich als eine holomorphe Abbildung $U \to \overline{\mathbb{C}}$ auffassen läßt. [6]

Aufgabe 46:

(a) Berechnen Sie die Laurent-Reihe von $\sin(z - i)/(i - z)^4$ um den Punkt $z_0 = i$ [2]

(b) Entwickeln Sie die Funktion $g(z) := 1/(z^2 - 4z + 3)$ auf dem Kreisring $1 < |w| < 3$ in eine Laurentreihe. [3]

(c) Wie läßt sich die folgende "Identität"

$$0 = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z} + \frac{1}{1-z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{-\infty}^{\infty} z^k$$

mit der Eindeutigleit der Laurentreihenentwicklung vereinbaren? [4]

(d) Es sei $f(z) := \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ eine auf dem Kreisring $1/2 < |z| < 2$ konvergente Laurentreihe. Es sei weiter Δ ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 2, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Berechnen Sie [3]

$$\frac{1}{3\pi i} \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz$$

$\mathbf{\Sigma} = 25$

Abgabe: Montag, 08.02.2010, zu Beginn der Vorlesung.