Mathematatik für Physiker III

Vorlesungszusammenfassung

VERSION VOM 15 FEBRUAR 2010

1. Differentialrechnung

1.1. Metrische und normierte Räume

In dieser Vorlesung bezeichnet $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ (Körper der reellen Zahlen) oder $\mathbb{C} = \{u+iv : u, v \in \mathbb{R}\}$ (Körper der komplexen Zahlen). Wir schreiben weiter $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ für die Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{Z}$ für den Ring der ganzen Zahlen, $\mathbb{Q}$ für den Körper der rationalen Zahlen. Ferner: $\mathbb{R}_{\geq a} = [a, \infty)$. Um die Begriffe "Abstand", "Konvergenz", "Umgebung", "Stetigkeit" etc., die man aus der Theorie der reellen Zahlen kennt, auch auf andere Mengen zu verallgemeinern, beginnen wir mit den folgenden fundamentalen Definitionen.

Definition 1.1.1. (Metrischer Raum) Es sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty) \subset \mathbb{R}$ heißt eine *Metrik* oder eine *Abstandsfunktion* falls für alle $x, y, z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(M1) $d(x, y) = 0. \iff x = y$
(M2) (Symmetrie) $d(x, y) = d(y, x)$
(M3) (Dreiecksungleichung) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$
Eine Menge X zusammen mit einer Metrik d nennt man einen *metrischen Raum*.

Definition 1.1.2. (Normierter Raum) Es sei V ein $\mathbb{K}$ Vektorraum. Eine Abbildung $\nu : V \to [0, \infty)$ nennt man ein *Norm*, falls für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(N1) $\nu(x) = 0 \iff x = 0$
(N2) $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$
(N3) (Dreiecksungleichung) $\nu(x + y) \leq \nu(x) + \nu(y)$
Man schreibt oft $\|x\|$ statt $\nu(x)$. Ein Vektorraum zusammen mit einer Norm, $(V, \| \ \|)$, nennt man einen *normierten Vektorraum*. Aus den Normaxiomen folgt die sog. umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\forall\, x, y \in V \qquad |\nu(x) - \nu(y)| \geq \nu(x - y)$$

Definition 1.1.3. (Skalarprodukt) Es sei V ein $\mathbb{K}$ Vektorraum. Ein Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung $h : V \times V \to \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:
(H1) Falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, h ist $\mathbb{R}$-bilinear und symmetrisch,
oder,
(H1*) falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, h ist hermitesch, d.h., für alle $x_j, y_j \in V$, $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{C}$ gilt:

$$h(\lambda_1 x_1 + \mu_1 y_1, \lambda_2 x_2 + \mu_2 y_2) = \overline{\lambda}_1 \lambda_2 h(x_1, x_2) + \overline{\lambda}_1 \mu_2 h(x_1, y_2) + \overline{\mu}_1 \lambda_2 h(y_1, x_2) + \overline{\mu}_1 \mu_2 h(y_1, y_2)$$
$$h(x_1, x_2) = \overline{h(x_2, x_1)}$$

(H2) (positive Definitheit) Für alle $x \in V$ gilt $h(x, x) \geq 0$

(H3) (keine Entartung) $h(x,x) = 0 \iff x = 0$
Man schreibt oft $\langle x, y\rangle$ statt $h(x,y)$.

Bemerkungen.
• Ein Skalarprodukt auf V definiert auf V eine Norm durch $\|v\| := \|v\|_{\langle\ ,\ \rangle} := \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
• Eine Norm auf V definiert durch die Vorschrift $d(v,w) := d_{\|\ \|}(v,w) := \|v-w\|$ eine Metrik auf V.
• Es gibt Normen auf Vektorräumen, die von keinem Skalarprodukt induziert werden können und es gibt Metriken auf V die von keiner Norm $\|\ \|$ herkommen.

Für Vektorräume mit einem Skalarprodukt gilt die
1.1.4. Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$\forall\, v, w \in V \qquad |\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

wobei die Ungleichung strikt ist wenn v und w linear unabhängig sind.

Beispiele 1.1.5. Es sei $N := \{1, \dots, n\}$ oder $N = \mathbb{N}$. (Beweise für (b) – (d): Übungsaufgaben)

(a) Es sei X eine beliebige Menge. Dann ist $d_\delta(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$ die sog. *diskrete* Metrik auf X.

(b) Für jedes $p \in (0, \infty)$ die Menge der N-Tupeln (äquivalent, die Menge der Abbildungen $N \to \mathbb{K}$)
$$\ell^p(N) := \{(x(k))_{k\in N} : \sum_{k\in N} |x(k)|^p < \infty\}\ ,$$
versehen mit der komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation, ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für $p \in [1, \infty)$ macht $\|(x(k))\|_p := \big(\sum_{k\in N} |x(k)|^p\big)^{1/p}$ aus $\ell^p(N)$ einen normierten Raum.

(c) Auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $C^0([0,1])$ der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ ist durch
$$\|f\|_\infty := \|f\|_{[0,1]} := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
eine Norm erklärt: die sog. *Supremumsnorm.* Analoge Konstruktion macht man auch für $\ell^\infty(N) := \{(x(j)) : \sup_{j\in N} |x(j)| < \infty\}$.

(d) Speziell für $p = 2$ ist $\langle (x(k)), (y(k))\rangle := \sum_{k\in N} \overline{x(k)} y(k)$ ein Skalarprodukt auf $\ell^2(N)$.
Falls $N = \{1, \dots, n\}$ so ist $(\ell^2(N), \langle\ ,\ \rangle)$ der wohlbekannter Vektorraum $\mathbb{K}^n$, versehen mit dem euklidischen Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \overline{x}_1 y_1 + \cdots + \overline{x}_n y_n$. Wir schreiben d_e für die induzierte euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

(e) Jede Teilmenge $Y \subset X$ eines metrischen Raumes, zusammen mit der eingeschränkten Abstandsfunktion $d : Y \times Y \to [0, \infty)$, ist ein metrischer Raum. Wir nennen ein solches Paar $(Y, d|_Y)$ einen Teilraum von (X, d). Auch das endliche kartesische Produkt $X_1 \times \cdots \times X_n$ von metrischen Räumen kann mit einer metrische Struktur versehen werden, z.B., sind
$$D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_j d_j(x_j, y_j) \quad \text{oder} \quad \widetilde{D}((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_j \{d_j(x_j, y_j)\}$$
Metriken auf $X_1 \times \cdots \times X_n$ (die topologisch äquivalent im Sinne von 1.2.6(c) sind).

(f) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist $\underline{d}(x,y) := \min\{d(x,y), 1\}$ ebenfalls eine Metrik auf X. Die Topologien (siehe Bemerkungen bevor 1.2.3) erzeugt durch d und $\underline{d}$ sind gleich. $\underline{d}$ ist jedoch beschränkt auf ganz X.

1.2. Offene und abgeschlossene Mengen, Konvergenz und Stetigkeit

Die offenen Intervalle in $\mathbb{R}$ sowie deren beliebige Vereiningungen waren von fundamentale Bedeutung für die Analysis auf $\mathbb{R}$. Analoge Begriffe lassen sich auch für beliebige metrische Räume definieren.

Definition 1.2.1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Eine (offene) metrische Kugel um $x \in X$ mit Radius $r > 0$ ist die Teilmenge

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

(b) Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt eine *Umgebung* des Punktes $x \in X$ falls eine Kugel mit positiven Radius r existiert, so dass $B_r(x) \subset U$ gilt.

(c) Eine Teilmenge $W \subset X$ heißt *offen* falls sie eine Umgebung aller in W enthaltenen Punkte ist. Insbesondere ist die leere Menge $\varnothing$ eine offene Teilmenge in (X, d).

(d) Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen* falls deren Komplement $A^c := X \setminus A$ offen ist.

Theorem 1.2.2. *Es sei (X, d) ein metrischer Raum.*

i Jede Kugel $B_r(x) \subset X$ ist eine offenen Teilmenge.

ii Jede offenen Teilmenge $W \subset X$ ist eine Vereiningung von Kugeln: $W = \bigcup_{j \in J} B_{r_j}(x_j)$.

iii Beliebige Vereiningungen offener Mengen sind offen. Endliche Durschnitte offnener Mengen sind offen.

iv Beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. Endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen.

Bemerkungen.

• Jeder metrische Raum ist *hausdorff*, d.h., für je zwei verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in X$ gibt es Umgebungen U_1 von x_1 und U_2 von x_2 mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

• Jede offene Teilmenge $U \subset X$ eines metrischen Raumes läßt sich als eine (i.A. unendliche) Vereiningung von Kugeln mit verschiedenen Radii und Mittelpunkten darstellen: $U = \bigcup_j B_{r_j}(x_j)$.

• Die Menge diejenigen Teilmengen von X, die offen sind, bilden die sog. *topologische Struktur* oder *Topologie* auf X. Diese Menge kann als eine Teilmenge $\mathcal{T}$ der Potenzmenge 2^X (d.h. die Menge aller Teilmengen von X) betrachtet werden. Ohne den Umweg über metrische Räume definieren Mathematiker den Begriff der Topologie in die folgende Art und Weise: Eine Topologie $\mathcal{T}$ auf einer Menge X ist eine ausgezeichnete Teilmenge $\mathcal{T} \subset 2^X$, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(T1) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$.

(T2) Beliebige Vereinigungen $\bigcup_j U_j$ von Elementen U_j aus $\mathcal{T}$ liegen wieder in $\mathcal{T}$.

(T2) Endliche Durchschnitte $\bigcap_j U_j$ von Elementen U_j aus $\mathcal{T}$ liegen wieder in $\mathcal{T}$.

Eine Menge X zusammen mit der Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, die die Bedingungen (T1) – (T3) erfüllt, nennt man einen *topologischen Raum.* Man bezeichnen die Elemente aus $\mathcal{T} \subset 2^X$ als die offenen Teilmengen in X. Ausgehend von $\mathcal{T}$ lassen sich die Begriffe "offen" (per definitionem), "abgeschlossen", "Häufungspunkt", "Rand", "Konvergenz", "Stetigkeit" etc. (siehe unten) ebenfalls problemlos definieren. Die so erhaltenen Klasse von beliebigen topologischen Räumen ist wesentlich größer als die metrischen Räume (X, d), deren Topologien wie in 1.2.1 konstruiert wurde. In dieser Vorlesung werden wir auf diesen allgemeineren Standpunkt aber weitgehend verzichten und uns hauptsächlich mit den metrischen Räumen beschäftigen. Die von einier Metrik d auf X induzierte Topologie, d.h., die Menge $\mathcal{T}$ aller offenen Teilmengen von X, bezeichnen wir als eine *metrische Topologie.*

Definition 1.2.3. Es sei $C \subset X$ eine Teilmenge eines metrischen Raumes.

(a) Einen *Häufungspunkt von C* nennt man jeden Punkt $y \in X$, für den gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; B_\varepsilon(y) \cap X \text{ enthält Punkte aus } C \setminus \{y\}.$$

(b) Einen *Randpunkt von* C nennt man jeden Punkt $y \in X$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Kugel $B_\varepsilon(y)$ sowohl Punkte aus C als auch Punkte aus $X \setminus C$ enthält.

Man bezeichne mit $\mathrm{Hp}(C)$ die Menge aller Häufungspunkte und mit ∂C die Menge aller Randpunkte von C.

(c) Der Abschluss $\overline{M}$ von $M \subset X$ ist definitionsgemäß die Menge $\overline{M} := \bigcap\limits_{\substack{A \supset M \\ A \text{ abg}}} A$

Gilt für eine Teilmenge $M \subset X$ $\overline{M} = X$ so heißt M *dicht* in X. Beispiel: $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

(d) Jeder Punkt $x \in C$, für den C eine Umgebung ist, nennt man einen *inneren Punkt* von C. Die Menge aller inneren Punkte von C, das sog. *Innere*, oder der *offene Kern* von C, bezeichnet man mit $\mathrm{int}(C)$ (oder C°)

Lemma 1.2.4. *Es sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt*
i $\overline{M} = M \cup \mathrm{Hp}(M) = M \cup \partial(M)$.
ii M *is offen* $\iff$ $M = \mathrm{int}(M)$ $\iff$ $M \cap \partial M = \varnothing$
iii $\partial M = \overline{M} \setminus \mathrm{int}(M)$

Definition 1.2.5. Es sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X *konvergiert gegen* $y \in X$ falls für jede Umgebung $U(y)$ von y ein $N = N_U \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x_n \in U(y)$ für alle $n \geq N_U$. Wir schreiben dann $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$ oder einfach nur $x_n \to y$.
Äquivalent umformuliert: $\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \exists\, N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so dass $d(x_n, y) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$.
Konvergiert eine Folge (x_n) (aus X) nicht gegen einen Grenzwert (in X), so sagt man, dass sie *divergent* (in X) ist.

(b) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X heißt eine *Cauchy-Folge* falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ für alle $m, n \geq N$ gilt.

Eine Cauchy-Folge in (X,d) muss nicht konvergieren. Z.B. ist in $(\mathbb{Q}, d_e)$ die rekursiv definierte Folge $x_{m+1} := x_m/2 + 1/x_m$ mit $x_1 = 1$ eine Cauchy-Folge ohne einen Grenzwert (in $\mathbb{Q}$).

(c) Ein metrischer Raum (X,d) heißt *vollständig* falls jede Cauchy-Folge (x_n) aus X gegen ein Element aus X konvergiert. Ein normierter Raum $(V, \| \ \|)$, der bzgl. der induzierten Abstandsfunktion $d_{\| \ \|}$ vollständig ist, heißt ein *Banachraum.* Ein Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt, der vollständig bzgl. der induzierten Metrik $d_{\langle\ ,\ \rangle}(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ ist, heißt ein *Hilbertraum.*

Aus der Vorlesung in dem ersten Semester sollte bekannt sein, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, versehen mit der euklidischen Metrik $d(x,y) := |x-y|$, vollständig sind.

Eine divergente Folge (x_n) aus X kann konvergente Teilfolgen (x_{n_k}) besitzen: Z.B. ist die Folge $(x_n) := ((-1)^n, i^n)$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ divergent, aber die Teilfolgen (x_{1+4k}), (x_{2+4k}), (x_{3+4k}) und (x_{4k}) konvergieren (als konstante Folgen) in $\mathbb{C}^2$.

In einem metrischen Raum (X,d) kann von jeder Teilmenge $M \subset X$ der Durchmesser ermittelt werden:

$$\mathrm{diam}(M) := \sup_{x,y\in M} d(x,y) \ \ \in [0, +\infty]$$

Man sagt, dass M bzgl. d *beschränkt* ist, falls $\mathrm{diam}(M) < \infty$ gilt.

Definition 1.2.6. (Stetigkeit) Es seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume.

(a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt (folgen)*stetig in* $x \in X$ falls für jede Folge (x_n) aus X mit $\lim x_n = x$ die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *(global) stetig* falls sie stetig in jedem Punkt $x \in X$ ist. Für die Menge aller stetigen Abbildungen $X \to Y$ schreiben wir $C^0(X, Y)$.

Besonders wichtig sind die Abbildungen, die die topologische Struktur von metrischen Räume isomorph erhalten:

(b) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt ein *Homöomorphismus*, falls f stetig, bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ ebenfalls stetig ist.

(c) Es seien d_1 und d_2 zwei Abstandsfunktionen auf der Menge X. Man sagt, dass (X, d_1) *feiner* als (X, d_2) ist falls die identische Abbildung Id : $(X, d_1) \to (X, d_2)$ stetig ist. So z.B. ist $\mathbb{R}$, versehen mit der diskreten Metrik d_δ aus 1.1.5(a), feiner als $\mathbb{R}$ versehen mit der euklidischen Metrik d_e. Umgekehrt ist jedoch die identische Abbildung Id : $(\mathbb{R}, d_e) \to (\mathbb{R}, d_\delta)$ nicht stetig. Ist die identische Abbildung Id : $(X, d_1) \to (X, d_2)$ eine Homöomorphismus, so sagt man, dass die beiden Metriken d_1 und d_2 *topologisch äquivalent* sind.

Lemma 1.2.7. (Eindeutigkeit des Grenzwertes) *Sind y_1 und y_2 zwei Grenzwerte einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum (X, d), so gilt $y_1 = y_2$.*

Beweis: Es sei $\lim x_n = y_1$ und $\lim x_n = y_2$. Angenommen $y_2 \neq y_1$, d.h., $\varepsilon := d(y_1, y_2) > 0$. Dann sind $B_{\varepsilon/2}(y_1)$ und $B_{\varepsilon/2}(y_2)$ zwei disjunkte Umgebungen. Da aber wegen $\lim x_n = y_1$ bis auf endliche viele Ausnahmen $x_n \in B_{\varepsilon/2}(y_1)$, so können höchsten endlich viele Folgenglieder x_k in $B_{\varepsilon/2}(y_2)$ liegen. Dann aber kann y_2 kein Grenzwert von (x_n) sein, was den Widerspruch zu unseren Annahme liefert. □

Lemma 1.2.8. (Stetigkeit und offene Teilmengen) *Eine Abbildung $f : (X, d) \to (Y, d_Y)$ ist genau dann stetig, falls das Urbild $f^{-1}(V)$ jeder offenen Teilmenge $V \subset Y$ offen in X ist.*

Beweis: "$\Rightarrow$" Es sei f folgenstetig. Angenommen, es gäbe eine offene Teilmenge $V \subset Y$, so dass $f^{-1}(V)$ nicht offen ist. Dann gibt es einen Randpunkt $x \in f^{-1}(V)$. Insbesondere gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $y_n \in B_{1/n}(x) \setminus f^{-1}(V)$. Dann aber $\lim y_n = x$ in X und wegen der Stetigkeit von f auch $\lim f(y_n) = f(x) \in V$. Da jedoch n.V. V offen ist gilt es $f(y_n) \in V$ für alle $n \geq N$ für einen endlichen Index N. Für solche n-s gelte aber $y_n \in f^{-1}(V)$ im Widerspruch zu Konstruktion der Folge y_n.
"$\Leftarrow$" Für jede offenen Teilmenge $V \subset Y$ sei jetzt $f^{-1}(V)$ offen und $x \in X$ ein beliebiges Element. Wir zeigen, dass f in x (folgen)stetig ist. Da insbesondere für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ das Urbild von $B_\varepsilon(f(x))$ offen ist, enthält $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$ eine offene Kugel $B_\delta(x)$ für ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$. Für jede Folge (x_n) aus X mit $\lim x_n = x$ gibt es dann ein N mit $x_n \in B_\delta(x)$ für alle $n \geq N$. Wegen $f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ folgt dann $d(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgern wir, dass $\lim f(x_n) = f(x)$ was zu zeigen war. □

Bemerkung. Um die Stetigkeit einer Abbildung $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ zu zeigen, reicht es nachzuweisen, dass das Urbild jeder offenen Kugel, $f^{-1}(B_{r_j}(y_j))$, offen in X ist.

Definition 1.2.9. (Konvergenzmodi für Funktionenfolgen) Es sei $f_n : X \to Y$ eine Folge von Abbildungen zwischen zwei metrischen Räumen und $g : X \to Y$ eine weitere Abbilung.

(a) (f_n) konvergiert *punktweise* gegen g wenn für jedes $x \in X$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ gilt.

(b) (f_n) konvergiert (global) *gleichmäßig* gegen g wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $d_Y(f_n(x), g(x)) < \varepsilon$ simultan für alle $x \in X$ gilt.

(c) (f_n) konvergiert *lokal gleichmäßig* gegen g wenn für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U(x) \subset X$ mit der folgenden Eigenschaft existiert: Die Einschränkungen $f_n|_{U(x)}$ konvergieren gleichmäßig gegen $g|_{U(x)}$.

Lemma 1.2.10. *Es seien X, Y zwei metrische Räume.*

i Ist $g : X \to Y$ der lokal gleichmäßige Grenzwert einer Folge $f_n : X \to Y$ von stetigen Funktionen, so ist g ebenfalls stetig.

ii "$f_n \to g$ konvergiert gleichmäßig" $\Longrightarrow$ "$f_n \to g$ konvergiert lokal gleichmäßig" $\Longrightarrow$ "$f_n \to g$ konvergiert punktweise". Die Umkehrungen dieser Implikationen sind i.A. falsch.

Beispiel 1.2.11. Es sei $B(X, Y) := \{f : X \to Y : \text{stetig } \sup_{x,y \in X} d_Y(f(x), f(y)) < \infty\}$ die Menge der beschränkten stetigen Abbildungen zwischen den metrischen Räumen X und Y. Dann ist

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$$

eine Metrik auf $B(X, Y)$. Die Konvergenz $f_n \to f$ bzgl. der Metrik d ist genau die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f. Ist (Y, d_Y) vollständig, so ist auch $(B(X, Y), d)$ vollständig.

Definition 1.2.12. Es seien X, Y zwei metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *gleichmäßig stetig* falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$. Eine Teilmenge von Abbildungen $\mathcal{F} \subset C^0(X, Y)$ heisst *gleichgradig stetig* in $x \in X$ falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(x)$ von x existiert mit $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ für alle $x, y \in U(x)$ und $f \in \mathcal{F}$ gilt.

1.3. Kompaktheit

Definition 1.3.1. (Kompaktheit) Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Eine *offene Überdeckung* einer Teilmenge $M \subset X$ besteht aus einer Menge offener Teilmengen $\mathfrak{U} = \{U_j : U_j \subset X \text{ offen}\}$, so dass $M \subset \bigcup_j U_j$ gilt.

(b) Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt (überdeckungs)*kompakt* falls aus jeder offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_j\}$ von K sich eine endliche Teilüberdeckung auswählen läßt , d.h., es existieren endlich viele offene Teilmengen $U_{j_1}, \dots, U_{j_m}$ in der Überdeckung $\mathfrak{U}$, so dass $K \subset U_{j_1} \cup \dots \cup U_{j_m}$ gilt.

(c) Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge (x_n) aus K eine in K konvergente Teilfolge besitzt.

Endliche Mengen in einem beliebigen metrischen Raum, abgeschlossene und beschränkte Intervalle in $\mathbb{R}$, sowie deren Produkte: $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset (\mathbb{R}^n, d_e)$ sind Beispiele kompakter Teilmengen.

Bemerkungen. Eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen. Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt. Eine Teilmenge A eines kompakten metrischen Raumes, die vollständing bzgl der induzierten Metril $d|_A$ ist, ist kompakt. Eine abgeschlossenen Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist vollständig.

Theorem 1.3.2.
i *Eine kompakte Menge eines metrische Raumes ist abgeschlossen und beschränkt. Die Umkehrung ist für allgemeine metrische Räume in der Regel falsch (siehe Übungsaufgabe 4). Sie gilt jedoch in dem Spezialfall von Teilmengen in* $(\mathbb{R}^n, d_e)$ *(Satz von Heine-Borel).*
ii *In einem metrischen Raum* X *ist eine Teilmenge* $K \subset X$ *genau dann kompakt wenn sie folgenkompakt ist.*
iii *Das (endliche) Produkt* $K_1 \times \cdots \times K_\ell$ *von kompakten Teilmenge* $K_j \subset X_j,\ j \in \{1, 2, ..., \ell\}$ *ist eine kompakte Teilmenge von* $X_1 \times \cdots \times X_\ell$.

Bemerkung. Das Produkt $X_1 \times \cdots \times X_\ell$ in der obigen Aussage iii trägt die sog. Produkttopologie, d.h., eine Teilmenge $V \subset X_1 \times \cdots \times X_\ell$ ist genau dann offen, falls $V = \bigcup_j U_{j_1} \times \cdots \times U_{j_\ell}$ wobei für alle j_k $U_{j_k} \subset X_k$ offene Teilmengen sind. Die so definierten offenen Teilmengen in $X_1 \times \cdots \times X_\ell$ sind z.B. auch von der Metrik $d((x_1, ..., x_\ell), (y_1, ..., y_\ell)) := \max\{d_1(x_1, y_1), ..., d_\ell(x_\ell, y_\ell)\}$ induziert (wie in Def. 1.2.1). D.h., die Produkttopologie von endlichen kartesischen Produkten von metrischen Räumen ist eine metrische Topologie.

Definition 1.3.3. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ nennt man
- *abstandserhaltend*, falls für alle $x, y \in X$ $d_Y(f(x), f(y)) = d_X(x, y)$ gilt,
- eine *Isometrie*, falls sie eine bijektive abstandserhaltende Abbildung ist,
- eine *Kontraktion*, falls für alle $x, y \in X$ $d_Y(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_X(x, y)$ mit $c \in [0, 1)$ gilt.

Eine abstandserhaltende Abbildung oder eine Kontraktion ist automatische stetig.

Banachscher Fixpunktsatz 1.3.4. *Es sei* $f : (X, d) \to (X, d)$ *eine Kontraktion. Ist* (X, d) *vollständig, so gibt es genau einen Fixpunkt* $x \in X$ *von* f*, d.h.,* $f(x) = x$.

Definition 1.3.5. **(Zusammenhang)** Eine Teilmenge $M \subset X$ eines metrischen (oder topologischen) Raumes X heißt
- *zusammenhängend* falls für jedes Paar von offenen Teilmenge U_1, U_2 mit $M \subset U_1 \cup U_2$ und $M \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ entweder $M \cap U_1 = \emptyset$ oder $M \cap U_2 = \emptyset$;
- *wegzusammenhängend* falls für je zwei Punkt $x, y \in M$ es einen stetigen Weg $\gamma : [0, 1] \to M$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.

Wegzusammenhängende Räume sind zusammenhängend, aber die Umkehrung gilt i.A. nicht. Offene zusamenhängende Teilmengen in $\mathbb{K}^n$ sind wegzusammenhängend. Intervale in $\mathbb{R}$ sind zusammenhängend.

Zwischenwertsatz 1.3.6. *Ist* X *zusammenhängend und* $f : X \to \mathbb{R}$ *stetig, so wird jeder Wert* z*, der zwischen zwei Werten* $f(x_1)$ *und* $f(x_2)$ *liegt, in irgendeinem Punkt von* X *angenomen.*

1.4. Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen

Vorbemerkungen. Es seien $(E, \|\ \|)$, $(E', \|\ \|')$ normierte Vektorräume oder sogar Banachräume, d.h., normierte und vollständige Vektorräume (z.B., $\mathbb{K}^n$, ℓ^2, $C^0(I, \mathbb{K}^n)$ etc.). Wir schreiben U_E für eine offene Teilmenge in dem normierten Vektorraum E.
Eine Abbildung $A : E \to E'$ heißt *linear* falls für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $v, w \in E$ $A(\lambda v + \mu w) = \lambda A(v) + \mu A(w)$ gilt. Falls $\dim E = \infty$, so braucht A nicht stetig zu sein. In dem Fall $E = \mathbb{K}^n$, $E' = \mathbb{K}^m$ ist jede lineare Abbildung $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch eine matrix $\mathsf{M}_A = (a_{jk})_{1 \leq j \leq m, 1 \leq j \leq n}$ beschrieben: $A(x) = \mathsf{M}_A \cdot x$.

Lemma 1.4.1. *Es sei $A : E \to E'$ eine lineare Abbildung zwischen normierten Vektorräumen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

i A *ist (global) stetig.*

ii A *ist stetig in 0*

iii A *ist beschränkt, d.h., es existiert* $C > 0$ *mit* $\|A(v)\|' \leq C \cdot \|v\|$ *für alle* $v \in E$.

Die Menge aller stetigen linearen Homomorphismen von E nach E', $\mathcal{L}(E, E')$, ist ein normierter Vektorraum mit der Operatornorm

$$\| \ \|_{\mathrm{op}} : \mathcal{L}(E, E') \to \mathbb{R}_{\geq 0}, \qquad \|\Phi\|_{\mathrm{op}} := \sup_{u \neq 0} \frac{\|\Phi(v)\|'}{\|v\|} . \tag{1.4.2}$$

Es gilt für ein $\Phi \in (\mathcal{L}(E, E'), \| \ \|_{\mathrm{op}})$: $\forall x \in E \quad \|\Phi(x)\|' \leq \|\Phi\|_{\mathrm{op}} \cdot \|x\|$. Unter der Vorasusetzung, dass E' vollständig ist, ist auch $\mathcal{L}(E, E')$ vollständig, d.h., ein Banachraum.

Wir reservieren die Bezeichnung $\mathrm{Hom}(E, E')$ für den Vektorraum aller, nicht notwendigerweise stetigen linearen Abbildungen. Z.B. ist die Ableitungsabbildung : $C^\infty([0, 1]) \to C^\infty([0, 1])$, $f \mapsto f'$ eine $\mathbb{R}$-lineare aber nicht stetige Abbildung. Hierbei bezeichet $C^\infty([0, 1])$ den Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen $(0, 1) \to \mathbb{R}$, für die jede Ableitung $f^{(k)} : (0, 1) \to \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung auf $[0, 1]$ besitzt.

Definition 1.4.3. Es seien $(E, \| \ \|), (E', \| \ \|')$ zwei normierte Vektorräume, $U_E \subset E$ eine offene Teilmenge und $F : U_E \to E'$ eine Abbildung.

(a) Wir beginnen mit dem Fall $E = \mathbb{K}^n$. Man sagt, dass F eine partielle Ableitung nach x_k in $p = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ besitzt, falls der Grenzwert

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(p) := \partial_k F(p) := \lim_{h \to 0} \frac{F(y_1, \dots, y_k + h, y_{k+1}, \dots, y_n) - F(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n)}{h} \quad \in E'$$

existiert.

(b) Es sei weiter $v \in E$. F besitzt in $p \in U$ eine *Richtungsableitung in Richtung* v, falls es einen Vektor $a \in E'$ mit

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(p + tv) - F(p)}{t} = a$$

gibt. Wir schreiben dann $D_v F(p)$ für a.

(c) F heißt (total) *differenzierbar* (oder *Fréchet-differenzierbar*) in $p \in U$ falls es eine stetige lineare Abbildung $A : E \to E'$ gibt, so dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(p + h) - F(p) - A(h)\|'}{\|h\|} = 0 .$$

Wir schreiben dann DF_p oder $DF(p)$ für ein solches A.

Bemerkungen.

• Sind e_j die kanonischen Basisvektoren in $\mathbb{K}^n$ so und $f : U_{\mathbb{K}^n} \to \mathbb{K}$ so gilt $\frac{\partial}{\partial x_k} f(p) = D_{e_k} f(p)$

• Eindeutigkeit: Sind $A, B : E \to E'$ zwei stetige lineare Abbildungen, die der Bedingung in 1.4.3(c) genügen, so gilt $A = B$.

• Die Fréchet Differenzierbarkeit (wie in (c)) läßt sich auch folgendermassen formulieren: Eine stetige lineare Abbildung $A : E \to E'$ ist das Fréchetdifferential von F in p falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ existiert mit

$$\|F(p + h) - F(p) - A(h)\|' \leq \varepsilon \|h\| \qquad \forall\, h \in E \text{ mit } \|h\| \leq \delta$$

• In dem Speziallfall $E = \mathbb{R}$, d.h., $F : (a,b) \to E'$ ist ein Weg in E', identifiziert man die lineare Abbildung $DF(p) : \mathbb{R} \to E'$ mit dem Vektor $w = DF(p)(1) \in E'$, so dass die Ableitungs*funktion* von F wieder eine Abbildung $(a,b) \to E'$ ist. In dem allgemeinen Fall ist die Ableitungsfunktion eine Abbildung $DF : U_E \to \mathcal{L}(E,E')$. Der Wertebereich von DF (nämlich $\mathcal{L}(E,E')$) unterscheidet sich dann von dem Wertebereich E' von F.

Lemma 1.4.4. *Es seien E, E' normierte Vektorräume und $f : U_E \to E'$ eine Abbildung.*

i Eine in $p \in U_E \subset E$ total differenzierbare Abbildung F ist stetig in p. (Das ist i.A. falsch wenn bloss alle Richtungsableitungen in p existieren.)

ii Existiert das totale Differential $Df(p)$ von f, so gilt für alle $v \in E$: $Df(p)\,(v) = D_v f(p)$. Speziell in dem Fall $E = \mathbb{K}^n$ und $E' = \mathbb{K}^m$ ist das totale Differential von $F = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ durch die Jacobi-Matrix beschrieben:

$$DF(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix} = \Big(D_{e_1}F(p) \ \cdots \ D_{e_n}F(p) \Big)$$

Wir bezeichnen die Jacobimatrix von $F : U_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^m$ an der Stelle p mit $\mathrm{Jac}_p(F)$.

Ableitungsregeln 1.4.5. *Es seien E, E', E'' normierte Vektorräume, $U_E \subset E$ und $U_{E'} \subset E'$ offene Teilmengen und $f_\ell : U_E \to E'$, $\ell = 1,2$, $g : U_{E'} \to E''$ Abbildungen.*

i Sind f_1, f_2 an der Stelle $x \in U_E$ total differenzierbar, so ist auch $\lambda f_1 + \mu f_2$ total differenzierbar ($\lambda, \mu \in \mathbb{K}$) und es gilt $D(\lambda f_1 + \mu f_2)(x) = \lambda (Df_1)(x) + \mu (Df_2)(x)$.

ii **(Kettenregel)** *Gilt für $f := f_1$ die Inklusion $f(U_E) \subset U_{E'}$ und ist darüberhinaus f an der Stelle x und g an der Stelle $y = f(x)$ differenzierbar, so ist $g \circ f : U_E \to E''$ an der Stelle x differenzierbar und die Kettenregel lautet*

$$D(g \circ f)(x) = Dg_{f(x)} \circ Df(x) \,.$$

iii Falls $E = \mathbb{K}$, dann ist $f_1 \cdot f_2 : U_E \to \mathbb{K}$ und $f_1/f_2 : U_E \setminus \{f_2 = 0\} \to \mathbb{K}$ differenzierbar in x falls f_j in x differenzierbar sind, und es gilt

$$D(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot Df_2(x) + f_2(x) \cdot Df_1(x), \qquad D\Big(\frac{f_1}{f_2}\Big)(x) = \frac{f_2(x) \cdot Df_1(x) - f_1(x) \cdot Df_2(x)}{(f_2(x))^2}$$

Beweis: *(von (ii))*. Definitionsgemäß gilt es $f(x+h) = f(x) + Ah + o_f(h)$ und $g(y+k) = g(y) + Bk + o_g(k)$ mit $A := Df_x \in \mathcal{L}(E,E')$ und $B := Dg_{f(x)} \in \mathcal{L}(E',E'')$. Da A stetig ist, gibt es eine Konstante C mit $\|Ah\| \le C\|h\|$ und $\|Ah + o_f(h)\| \le (C+\varepsilon)\|h\| =: \tilde{C}\|h\|$, falls h aus einer hinreichend kleiner Umgebung $B_\delta(0)$ gewählt wurde. Daher:

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) = g(f(x) + Ah + o_f(h)) &= g \circ f(x) + B(Ah + o_f(h)) + o_g(Ah + o_f(h)) = \\ &= g \circ f(x) + B \circ A(h) + r(h) \qquad \text{mit } r(h) = B(o_f(h)) + o_g(Ah + o_f(h)) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} &= \lim_{h \to 0} \frac{B(o_f(h))}{\|h\|} + \lim_{h \to 0} \frac{o_g(Ah + o_f(h))}{\|h\|} = \\ &= B\Big(\lim_{h \to 0} \frac{o_f(h)}{\|h\|} \Big) + \lim_{h \to 0} \frac{o_g(Ah + o_f(h))}{\|Ah + o_f(h)\|} \underbrace{\frac{\|Ah + o_f(h)\|}{\|h\|}}_{\le \widetilde{C}} = 0 + 0 \qquad \square \end{aligned}$$

Mittelwertsatz 1.4.6. *Es seien $f : [a,b] \to E$ sowie $\nu : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen. Sei ferner $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\} \subset [a,b]$ eine abzählbare Teilmenge, so dass f und ν in allen Punkten aus $[a,b] \setminus D$ differenzierbar sind. Gilt es*

$$\|Df(x)\| \le \nu'(x) \qquad \forall\, x \in [a,b] \setminus D$$

so folgt: $\|f(b) - f(a)\| \le \nu(b) - \nu(a)$.

Beweis: Um die Aussage des Satzes zu zeigen, reicht es für alle $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$(\varepsilon) \qquad \|f(b) - f(a)\| \le \nu(b) - \nu(a) + \varepsilon(b - a + 2)$$

zu beweisen. Dazu definieren wir die folgende Teilmenge:

$$A := \left\{ z \in [a,b] : \begin{array}{l} \text{für jedes } x \in [a,z] \text{ gilt} \\ \|f(x) - f(a)\| \le \nu(x) - \nu(a) + \varepsilon(x - a + 1) + \varepsilon \displaystyle\sum_{n:\, d_n < x} 2^{-n} \end{array} \right\}$$

Zunächst ist es bloß klar, dass $a \in A$. Sei $c = \sup A$. Aus Stetigkeitsgründen $c \in A$ und $A = [a,c]$. Wir zeigen nun, dass $c = b$ (d.h., $A = [a,b]$) gelten muss. Angenommen, es gelte $c < b$. Dann erhalten wir einen Widerspruch wie folgt:

Fall 1: $c \in [a,b] \setminus D$. Aus der Definition der Differenzierbarkeit von f und ν an der Stelle c folgt dann die Existenz von einem $\delta > 0$, so dass für alle $0 \le h \le \delta$ gilt:

$$\|f(c+h) - f(c)\| \le \|Df(c)\|h + \frac{\varepsilon}{2}h$$
$$\nu(c+h) - \nu(c) \ge \nu'(c) - \frac{\varepsilon}{2}h$$

Da $c \in A$, so folgt aus den obigen zwei Ungleichungen sowie $\|Df(c)\| \le \nu'(c)$:

$$\begin{aligned} \|f(c+h) - f(a)\| &\le \|f(c) - f(a)\| + \|f(c+h) - f(c)\| \le \\ &\le \nu(c) - \nu(a) + \varepsilon(c - a + 1) + \varepsilon \sum_{n:\, d_n < c} 2^{-n} \ + \quad \|Df(c)\|h + \frac{\varepsilon}{2}h \ \le \\ &\le \nu(c) - \nu(a) + \varepsilon(c - a + 1) + \varepsilon \sum_{n:\, d_n < c} 2^{-n} + \nu(c+h) - \nu(c) + \varepsilon h \le \\ &\le \nu(c+h) - \nu(a) + \varepsilon(c + h - a + 1) + \varepsilon \sum_{n:\, d_n < c+h} 2^{-n} \end{aligned}$$

für alle $h \le \delta$, d.h., $c + h \in A$, im Widerspruch zu der Definition von c.

Fall 2: $c = d_m \in D$. Dann gibt es wegen Stetigkeit von f und ν ein $\delta > 0$, so dass für alle $h \in [0,\delta]$

$$\|f(c+h) - f(c)\| \le \frac{\varepsilon}{2}2^{-m} \qquad\qquad \nu(c+h) - \nu(c) \ge -\frac{\varepsilon}{2}2^{-m}$$

und damit, wie zuvor,

$$\begin{aligned} \|f(c+h) - f(a)\| &\le \|f(c) - f(a)\| + \|f(c+h) - f(c)\| \le \\ &\le \nu(c) - \nu(a) + \varepsilon(c - a + 1) + \varepsilon \sum_{n:\, d_n < c} 2^{-n} \ + \quad \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{-m} \le \\ &\le \nu(c) - \nu(a) + \varepsilon(c - a + 1) + \varepsilon \sum_{n:\, d_n < c} 2^{-n} + \nu(c+h) - \nu(c) + \varepsilon 2^{-m} \le \\ &\le \nu(c+h) - \nu(a) + \varepsilon(c + h - a + 1) + \varepsilon \sum_{n:\, d_n < c+h} 2^{-n} \end{aligned}$$

Das hieße aber $c + \delta \in A$ im Widerspruch zu der Maximalität von c. Damit also $A = [a,b]$ und wir haben für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung (ε) bewiesen. $\square$

Korollar 1.4.7. *Es seien E, E' normierte Vektorräume, $F : U_E \to E'$ eine stetige Abbildung, die bis auf abzählbar viele Ausnahmepunkte in U_E total differenzierbar ist. Ist die Strecke $p + tv,\ t \in [0, 1]$ in U_E enthalten, so gilt*

$$\|F(p + v) - F(p)\| \leq \sup_{t\in[0,1]} \|DF(p + tv)\|_{op} \cdot \|v\|$$

Integralversion des Mittelwertsatzes 1.4.8. *Es sei $f : U_{\mathbb{R}^m} \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Abbildung. Liegt die Strecke $p + tv,\ t \in [0, 1]$ ganz in $U_{\mathbb{R}^m}$ so gilt*

$$f(p + v) - f(p) = \Big(\int_0^1 Df(p + tv)\Big) \cdot v$$

Dabei ist das Integral einer vektorwertigen Abbildung $F : I \to \mathbb{R}^N$ koordinatenweise definiert:

$$\int_a^b \begin{pmatrix} F_1(t) \\ \vdots \\ F_N(t) \end{pmatrix} dt := \begin{pmatrix} \int_a^b F_1(t)\, dt \\ \vdots \\ \int_a^b F_N(t)\, dt \end{pmatrix}$$

Es sei $(E, \|\ \|)$ eine normierter Raum. Eine Abbildung $f : U_{\mathbb{R}^n} \to E$ heißt C^1*-differenzierbar* oder *stetig partiell differenzierbar* in $p \in U_{\mathbb{R}^n}$ falls alle ihre partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, \dots, n$ existieren in einer Umgebung von p und sind stetig in p. Ist f in jedem Punkt aus $U_{\mathbb{R}^n}$ stetig partiell differenzierbar, so schreiben wir einfach $f \in C^1(U_{\mathbb{R}^n}, E)$.
Da die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ wieder Abbildungen von $U_{\mathbb{R}^n} \to E$ sind, so kann man diesen Vorgang iterieren und die partiellen Ableitungen beliebiger Ordnung ℓ definieren:

$$\frac{\partial^\ell f}{\partial x_{m_\ell} \cdots \partial x_{m_1}} := \frac{\partial}{\partial x_{m_\ell}}\Big(\cdots \Big(\frac{\partial}{\partial x_{m_2}}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_{m_1}}\Big) \cdots \Big) : U_{\mathbb{R}^n} \to E \qquad m_1, \dots, m_\ell \in \{1, \dots, n\}$$

Sind *alle* partiellen Ableitungen der Ordnung ℓ von f stetig, so sagt man, dass f C^ℓ-differenzierbar ist, oder man schreibt $f \in C^\ell(U_{\mathbb{R}^n}, E)$. Falls partielle Ableitungen *aller* Ordnungen von f existieren, so ist f ∞-mal differenzierbar ($f \in C^\infty(U_{\mathbb{R}^n}, E)$). Falls $E = \mathbb{R}$, so schreiben wir $C^\ell(U_{\mathbb{R}^n})$ statt $C^\ell(U_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R})$.

Die Reihenfolge der partiellen Differentiation hat i.A. einen Einfluss auf das Ergebnis. So z.B., besitzt die stetige Funktion

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} x_1 x_2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq 0 \\ 0 & \text{für } (x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

partielle Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2)$, sowie $\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2)$, jedoch

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = -1 \ \neq\ 1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0).$$

Schwarzsches Lemma 1.4.9. *Es sei $f : U_{\mathbb{R}^n} \to E$ eine C^k-differenzierbare Abbildung (d.h., alle partiellen Ableitungen der Ordnung k existieren und sind stetig (in p)). Dann sind die Werte der partiellen Ableitungen k-ter Ordnung unabhängig von der Reihenfolge der Differentiation, d.h., für jedes k-Tupel $(n_1, \dots, n_k)$, $n_j \in \{1, \dots, n\}$ und eine beliebige Permutation $(m_1, \dots, , m_k)$ von $(n_1, \dots, n_k)$ gilt:*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{n_k} \cdots \partial x_{n_1}}(p) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{m_k} \cdots \partial x_{m_1}}(p)$$

Lemma 1.4.10. *Es sei* $(E, \| \ \|)$ *ein normierter Raum und* $f : U_{\mathbb{R}^n} \to E$ *stetig partiell differenzierbar in* $p \in U_{\mathbb{R}^n}$. *Dann ist* f *total differenzierbar in* p, *und es gilt*

$$Df(p)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)\,.$$

Definition 1.4.11. Ein *lineares Koordinatensystem* auf einem n-dimensionalen Vektorraum E nennt man ein lineares Isomorphismus $\varphi : E \to \mathbb{K}^n$.

Es seien jetzt $\varphi, \psi : E \to \mathbb{K}^n$ zwei (lineare) Koordinatensysteme auf E vorgegeben. Ein *Koordinatenwechsel* (von φ nach ψ) ist die Bijektion $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Es gibt eine Bijektion zwischen Basen $v_1, \dots, v_n$ von E und linearen Koordinatensystemen $\varphi_{v_1,\dots,v_n} : E \to \mathbb{R}^n$. Diese Korrespondenz ist durch

$$\varphi^{-1}_{v_1,\dots v_n}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

gegeben. Ist jetzt $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ ein endlichdim. Hilbertraum, so nennt man jedes Koordinatensystem $\varphi_{v_1,\dots,v_n} : E \to \mathbb{R}^n$, das durch eine orthonormale Basis $(v_j)_{1\le j\le n}$ von E gegeben ist, ein *euklidisches (rechtwinkliges, kartesisches) Koordinatensystem.*

Definition 1.4.12. Es seien E, E' zwei normierte Vektorräume und $f : U_E \to U_{E'}$ eine Abbildung. f ist ein *Diffeomorphismus* falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt werden:
- f ist differenzierbar in jedem Punkt aus U_E,
- $f : U_E \to U_{E'}$ ist bijektiv,
- $f^{-1} : U_{E'} \to U_E$ ist differenzierbar in jedem Punkt aus $U_{E'}$.

Bemerkungen. Wie das Beispiel : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t^3$ zeigt, muss die dritte Bedingung nicht gelten wenn die ersten beiden erfüllt sind.

Definition 1.4.13. Ein *lokales (krummliniges) Koordinatensystem* auf einer offenen Teilmenge U_E eines endlichdimensionalen Vektorraumes E ist ein Diffeomorphismus $\varphi : U_E \to U_{\mathbb{K}^n}$ auf eine offene Teilmenge $U_{\mathbb{K}^n}$ in $\mathbb{K}^n$.

Die Komponentenfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n : U \to \mathbb{K}$ von φ nennt man die *Koordinatenfunktionen* bzgl ϕ. So z.B. in $\mathbb{K}^n$ mit dem kanonischen kartesischen Koordinatensystem sind die Projektionen auf die k-te Komponente $\pi_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $(z_1, \dots, z_n) \mapsto z_k$ die Koordinaten<u>funktionen</u> des kartesischen Koordinatensystem. Meist schreibt man $x_j(p)$ statt $\pi_j(p)$.

Ist eine lokales Koordinatensystem φ auf U_E vorgegeben, so gibt es eine natürliche Korrespondenz zwischen Abbildungen $f : U_E \to E'$ und Abbildungen $g : \varphi(U_E) \to E'$: Diese Korrespondenz ist durch $g(\varphi_1, \dots, \varphi_n) := f \circ \varphi^{-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \varphi(U_E) \subset \mathbb{K}^n$ sowie $f(q) = g \circ \varphi(q)$, $q \in U_E$, festgelegt. In den meisten Fällen werden wir die gleiche Bezeichnung f sowohl für eine Abbildung $U_E \to E'$ wie auch für die "koordinatisierte" Version $U_{\mathbb{K}^n} \to E'$ verwenden. Sind lokale Koordinatenfunktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ vorgegeben, so lassen sich die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \varphi_j}$ bzgl. des Koordinatensystems $\varphi : U_E \to \mathbb{K}^n$ bilden. Die partielle Ableitung von $f : U_E \to E'$ nach der j-ten Koordinate ist dann einfach

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_j}(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f \circ \varphi^{-1}\big(\varphi_1(p), \dots, \varphi_j(p) + h, \varphi_{j+1}(p), \dots, \varphi_n(p)\big) - f \circ \varphi^{-1}\big(\varphi_1(p), \dots, \varphi_n(p)\big)}{h}$$

Beispiele für Koordinatenwechsel. Es sei $\varphi : (E, \langle\ ,\ \rangle) \to \mathbb{R}^n$ ein euklidisches Koordinatensystem.

• Polarkoordinatensystem ψ

$$\begin{array}{ccc}
E & & U \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\
\mathbb{R}^2 \supset \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \leq 0\} & \longleftarrow & \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi,\pi) \subset \mathbb{R}^2 \\
(r\cos\phi, r\sin\phi) & \longleftarrow & (r\ ,\ \phi) \\
(x,y) & \longrightarrow & (\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{sign}(y)\cdot\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}))
\end{array}$$

Hierbei wird die lokale Umkehrfunktion von cos, arccos, als eine Bijektion $[-1,1] \to [0,\pi]$ betrachtet.
• Kugelkoordinatensystem ψ

$$\begin{array}{ccc}
E & & U \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\
\mathbb{R}^3 \quad \supset \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,0,z) : x \leq 0\} & \longleftarrow & \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi,\pi) \times (0,\pi) \subset \mathbb{R}^3 \\
(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta) & \longleftarrow & (r\ ,\ \phi\ ,\ \theta)
\end{array}$$

Satz über die Umkehrfunktion 1.4.14. *Es seien E, E' Banachräume und $\psi : \mathcal{U}_E \to E'$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Ist die Ableitung $D\psi(x)$ invertierbar, so gibt es offene Umgebungen $U(x)$ von x und $U'(\psi(x))$ von $\psi(x)$, so dass $\psi : U(x) \to U'(\psi(x))$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist $D\psi_z$ invertierbar für alle $z \in U(x)$.*
Ist ψ vom Typ C^k so ist auch die Umkehrabbildung ψ^{-1} vom Typ C^k und es gilt $(D\psi^{-1})_y = (D\psi_{\psi^{-1}(y)})^{-1}$.

Bem. Es ist bekannt (und wird in im Rahmen der Funktionalanalysis bewiesen), dass eine bijektive und stetige Abbildung A zwischen <u>Banach</u>räumen eine *stetige* Umkehrabbildung A^{-1} besitzt. Wie das Beispiel $E := \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{K}e_k = \{(y_j)_{j\in\mathbb{N}} : y_j \neq 0$ für höchsten endlich viele $j\}$, e_k ist die unendliche Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in E$ mit $y_j = \delta_{k,j}$, $\quad L : E \to E$ linear mit $L(e_j) = (1/j)\cdot e_j$ zeigt, kann auf die Vollständigkeit von E nicht verzichtet werden: L ist nämlich eine stetige bijektive lineare Abbildung $E \to E$, deren Umkehrabbildung linear aber nicht stetig ist.

Beweis:

(a) Ersetzt man $z \mapsto \psi(z)$ durch $z \mapsto (D\psi_x)^{-1}(\psi(z+x) - \psi(x))$ so können wir O.B.d.A. annehmen, dass $x = 0$, $\psi : U_E \to E$, $\psi(0) = 0$ und $D\psi_0 = \mathrm{Id}$ gilt.

(b) Für $T := \mathrm{Id} - \psi$ gilt $DT_0 = 0$. Daher gibt es wegen Stetigkeit von DT eine Umgebung $B_r(0)$ mit $\|T\|_{\mathcal{L}(E,E)} \leq \frac{1}{2}$, und daher auch nach dem MWS

$$(*) \qquad \|T(x) - T(y)\| \leq \tfrac{1}{2}\|x-y\| \qquad \forall\ x,y \in \overline{B_r(0)}$$

(c) *Für jedes $y \in \overline{B_{r/2}(0)}$ gibt es genau ein $x \in \overline{B_r(0)}$ mit $\psi(x) = y$, d.h., es gibt die Umkehrabbildung $g := \psi^{-1} : \overline{B_{r/2}(0)} \to \overline{B_r(0)}$ von ψ.*
Dazu zeige man, dass für jedes $y \in \overline{B_{r/2}(0)}$ die Abbildung $T_y(x) := y + T(x)$ genau einen Fixpunkt auf $\overline{B_r(0)}$ hat: Wegen $\|T_y(x_1) - T_y(x_2)\| = \|T(x_1) - T(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$ kann man für $F = T_y$ und $X = \overline{B_r(0)}$ den Banachschen Fixpunktsatz 1.3.4 anwenden.

(d) Nach einer eventuellen Verkleinerung von r definiere man $U(0) := \mathcal{U}_r := \psi^{-1}(B_{r/2}(0)) \cap B_r(0)$.
Die bijektive Abbildung $\psi^{-1} : B_{r/2}(0) \to \mathcal{U}_r$ ist <u>stetig</u>.
Wegen $\|x-y\| = \|T(x) - T(y) + \psi(y) - \psi(x)\| \leq \|T(x) - T(y)\| + \|\psi(y) - \psi(x)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\| + \|\psi(y) - \psi(x)\|$, d.h. $\frac{1}{2}\|x-y\| \leq \|\psi(y) - \psi(x)\|$. Für $x = \psi^{-1}(u)$ und $y = \psi^{-1}(v)$ gilt dann $\|\psi^{-1}(u) - \psi^{-1}(v)\| \leq 2\|u - v\|$, $u,v \in B_{r/2}(0)$. Das ergibt die gleichmäßige Stetigkeit von ψ^{-1}.

(e) $D\psi_x$ *ist invertierbar für alle* $x \in \mathcal{U}$: $(D\psi_x)^{-1} = (\mathrm{Id} - DT_x)^{-1} = \sum_{\ell=0}^{\infty}(DT_x)^{\ell}$ existiert, da diese Reihe in dem Banachraum $\mathcal{L}(V, V)$ absolut konvergiert.

(f) Die lineare Abbildung $A_y := (D\psi_{\psi^{-1}(y)})^{-1}$ ist die totale Ableitung von ψ^{-1} an der Stelle $y = \psi(x) \in B_{r/2}(0)$ □

1.4.15. Vektorfelder. Es sei $(E, \| \ \|)$ ein normierter Vektorraum. Ein (stetiges) *Vektorfeld* auf U_E ist eine stetige Abbildung $X : U_E \to E$. Ist X k-fach stetig differenzierbar, (z.B. für $E = \mathbb{R}^m$ wenn alle Komponenten k-fach stetig partiell differenzierbar sind) so sagt man, dass X ein C^k-Vektorfeld ist. Während ein Vektorfeld sich physikalisch als ein Kraftfeld, elektrisches oder magnetisches Feld, hamiltonisches Vektorfeld etc.!deuten läßt, ist die mathematische Bedeutung von X die der Richtungsableitung an der Stelle $p \in U_E$ in die Richtung $X(p)$. Ein Vektorfeld kann also auf differenzierbare Funktionen angewendet werden: Für $f : U_E \to E'$ gilt

$$Xf(p) := D_{X(p)}f(p)$$

Wenn $E = \mathbb{R}^n$, $x_1, \dots, x_n$ die kartesische Koordinatenfunktionen auf E sind und $X(p) = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, so gilt

$$Xf(p) = D_{(v_1,\dots,v_n)}f\ (p) = \sum_{k=1}^{n} v_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) = \langle (v_1, .., v_n)\ ,\ \mathrm{grad}\, f(p)\rangle$$

Aus diesem Grund benutzt man für ein Vektorfeld $X = (X_1, \dots, X_n)$ auf einer offenen Teilmenge $U_{\mathbb{R}^n}$ auch die Schreibweise

$$X(p) = \sum_{j=1}^{n} X_j(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p \qquad X_j \in C^0(U_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{K})$$

Damit gilt $X(p)f = D_{X(p)}f(p) = Xf\ (p) = \sum_{j=1}^{n} X_j(p) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$. Insbesonders ist $\frac{\partial}{\partial x_j}$ ein Beispiel eines Vektorfeldes auf $\mathbb{R}^n$. Die gleiche Konstruktion kann man für ein beliebiges Koordinatensystem $\varphi : U_E \to \mathbb{R}^n$, $U \subset E$ offene Teilmenge, durchführen. Ein C^k-Vektorfeld X induziert eine Abbildung $X : C^k(U_E, \mathbb{K}) \to C^{k-1}(U_E, \mathbb{K})$, (d.h., X bildet differenzierbare Funktionen auf zumindest stetige Funktionen ab, die $\mathbb{K}$-linear ist und der Leibnizregel genügt: $\forall\ \lambda_j \in \mathbb{K},\ g_j \in C^k(U_E)$

$$\begin{aligned} X(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) &= \lambda_1 X(g_1) + \lambda_2 X(g_2) && \mathbb{K}\text{-Linearität} \\ X(g_1 \cdot g_2) &= X(g_1) \cdot g_2 + g_1 \cdot X(g_2) && \text{Leibnizregel} \end{aligned}$$

Man sagt auch, dass ein C^k-Vektorfeld X sich als ein *Differentialoperator erster Ordnung*, nämlich $X : C^k(U_E, \mathbb{K}) \to C^{k-1}(U_E, \mathbb{K})$, auffassen läßt. Dieser Vorgang läßt sich iterieren: sind $X_1, \dots, X_k$ C^k-Vektorfelder auf U_E, so kann man die folgende Abbildung definieren:

$$X_k \cdots X_2 X_1 : C^k(U_E) \to C^0(U_E), \qquad X_k \cdots X_2 X_1(f) := X_k(\cdots X_2(X_1 f)) \cdots)$$

Sind z.B. $x_1, \dots, x_n$ kartesischen Koordinatenfunktionen auf U_E (E sei hierbei ein endlichdimensionaler Hilbertraum) und $\partial/\partial x_j$ die partiellen Ableitungen (d.h., Richtungsableitungen in die Richtungen $e_1, \dots, e_n$ bzgl. einer orthonormalen Basis (e_j) von E) ist der folgende Differentialoperator zweiter Ordnung:

$$\Delta := \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

der sog. *Laplaceoperator*. Er kann ähnlich wie eine Vektorfeld als eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $C^k(U_E) \to C^{k-2}(U_E)$ aufgefasst werden, die obige Leibnizregel muss allerdings durch eine kompliziertere Formel ersetzt werden.

Bevor wir die nächste Aussage formulieren, verallgemeinern wir den Begriff einer partiellen Ableitung, die dann in einer koordinatenfreien Situation Anwendung findet. Anstatt nur in die Richtung eines Vektors $e_j \in E$ abzuleiten, definieren wir eine Ableitung "in Richtung eines Untervektorraumes $E_j \subset E$". Dazu wähle man eine Zerlegung (direkte Summe bzw. direktes Produkt) $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_k$ von E in endlich viele abgeschlossene Untervektorräume. Für eine Abbildung $F : U_{E_1} \times U_{E_2} \times \cdots \times U_{E_k} \to E'$ definiere man die folgende lineare Abbildung (falls existent): $\partial_{F_j} F\ (a_1, \ldots, a_k) := DF_{(j,a)}(a_j) : E_j \to E'$, wobei $F_{(j,a)} : U_{E_j} \to E'$ ist die Einschränkung $F_{(j,a)}(y) := F(a_1, \ldots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \ldots, a_k)$ bezeichnet. Z.B. für $E = \mathbb{R}^{m+n} = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n =: \{(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) : x_j \in \mathbb{R}\} \oplus \{(0, \ldots, 0, y_1, \ldots, y_n) : y_j \in \mathbb{R}\} = E_1 \oplus E_2$ und $F = (F_1, \ldots, F_k) : U_{E_1} \times U_{E_2} \to \mathbb{R}^k$ gilt

$$\partial_{E_1} F(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix} \qquad \partial_{E_2} F(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial y_n}(a) \end{pmatrix}$$

Ist dann F sogar Frechet-differenzierbar an der Stelle $p = (p_1, \ldots, p_k)$, so existieren alle partiellen Ableitungen in die Richtungen $E_1, .., E_k$ und es gilt für alle $v = (v_1, \ldots, v_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$:

$$DF_{(p_1, \ldots, p_k)}(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{j=1}^{k} \partial_{E_j} F_{(p_1, \ldots, p_k)}(v_j)$$

Satz über die impliziten Funktionen 1.4.16. *Es seien $U_j \subset E_j$ offene Teilmengen der Banachräume E_j, $j = 1, 2$, $F : U_1 \times U_2 \to E'$ eine C^n-Funktion und $(a, b) \in U_1 \times U_2$ mit $F(a, b) = 0$. Ist $\partial_{V_2} F(a, b) : V_2 \to E'$ ein linearer Isomorphismus, so gibt es in einer hinreichend kleinen Umgebung $U(a) \subset U_1$ von a eine eindeutig bestimmte C^n-Funktion $\phi : U(a) \to E_2$ mit $\phi(a) = b$ und $F(x, \phi(x)) = 0$ für alle $x \in U(a)$.*

Beweis: Man definiere die Abbildung $\Psi : U_1 \times U_2 \to U_1 \times E' \subset E_1 \times E'$ durch $\Psi(x, y) := (x, F(x, y)) =: (\Psi_1(x, y), \Psi_2(x, y))$. Deren Ableitung

$$D\Psi_{(a,b)} = \begin{pmatrix} \partial_{V_1}\Psi_1(a, b) & \partial_{V_2}\Psi_1(a, b) \\ \partial_{V_1}\Psi_2(a, b) & \partial_{V_2}\Psi_2(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{V_1} & 0 \\ \partial_{V_1} F(a, b) & \partial_{V_2} F(a, b) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(V_1 \times V_2, V_1 \times W)$$

ist invertierbar (und die inverse lineare Ableitung ist $\left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ B & A \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ -A^{-1}B & A^{-1} \end{smallmatrix}\right)$).

Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist Ψ, eingeschränkt auf eine geeignete Teilmenge $V_1 \times V_2$ von (a, b) in $E_1 \times E_2$, ein Diffeomorphismus auf das Bild. Es sei $\Phi := \Psi^{-1} =: (\Phi_1, \Phi_2)$ die (lokale) Umkehrfunktion. Dan erfüllt die Funktion $\phi(x) := \Phi_2(x, 0)$ die Aussage des Satzes.

Die lokale Eindeutigkeit von ϕ ergibt sich aus der Tatsache, dass $\Psi : V_1 \times V_2 \to \Psi(V_1 \times V_2) \subset E'$ ein Diffeomorphismus ist. Wäre ϕ_2 eine weitere Funktion, die den Bedingungen des Satzes genügt, so nach einer eventuellen Verkleinerung von V_1 folgt aus der Stetigkeit von ϕ_2, dass $\phi_2(V_1) \subset V_2$. Dann aber $\Psi(x, \phi(x)) = (x, 0) = \Psi(x, \phi_2(x))$, was $\phi = \phi_2$ impliziert (weil Ψ eine Bijektion ist). □

Satz vom Rang 1.4.17. *Es seien E, E' endlichdimensionale (normierte, d.h., Banach-) Vektorräume mit $\dim E = n$, $\dim E' = m$ und $F : U_E \to E$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Ist der Rang von $DF(p)$ (d.h., $k(p) := \dim(DF(p)(E))$) <u>konstant</u> für alle $p \in U_E$, so gibt es nach einer eventuellen Verkleinerung von $U := U_E$ Koordinatensysteme $\varphi : U \to \mathbb{K}^n$ und $\psi : U' \to \mathbb{K}^m$ mit $F(U) \subset U'$, so dass für $k = \mathrm{Rang}(DF(p))$*

$$F(\varphi_1(p), \ldots, \varphi_n(p)) = (\varphi_1(p), \ldots, \varphi_k(p), 0, \ldots, 0) = (\psi_1(F(p)), \ldots, \psi_m(F(p)))$$

für alle $p \in U$ gilt; siehe Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc} E \supset & U & \xrightarrow{F} & U' & \subset E' \\ & \updownarrow \varphi & \circlearrowright & \updownarrow \psi & \\ & V & \longrightarrow & V' & (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) \\ & \cap & & \cap & \\ & \mathbb{K}^n & & \mathbb{K}^m & \end{array}$$

Polynome und Potenzreihen in mehreren Veränderlichen. Analog zu dem eindimensionalem Fall definiert man polynomiale Funktionen und Potenzreihen in mehrereren Veränderlichen wie folgt: Sind $c_\alpha \in \mathbb{K}$ beliebige Konstanten, so nennt man für $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{K}^m$ den Ausdruck

$$P(y_1, \dots, y_m) := \sum_{|\alpha| \le d} c_\alpha \cdot y^\alpha = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^m \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_m \le d}} c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} \cdot y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m}$$

ein *Polynom* in den Variablen $y_1, \dots, y_m$. Man nennt d den Grad von P, falls wenigstens ein c_α mit $|\alpha| = d$ nicht verschwindet. Um unsere Schreibweise zu vereinfachen führen wir die folgende Notation ein: Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, sei

$$\begin{aligned} |\alpha| &:= \alpha_1 + \dots + \alpha_m = \sum_{j=1}^m \alpha_j, \qquad \alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_m! = \prod_{j=1}^m \alpha_j!, \\ x^\alpha &:= x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} = \prod_{j=1}^m x_j^{\alpha_j}, \qquad x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \\ \partial^\alpha f &:= \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_m^{\alpha_m} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}} \end{aligned} \tag{1.4.18}$$

wobei $f : U \to E$ eine $|\alpha|$-mal stetig (partiell) differenzierbare Funktion ist.

Eine *Potenzreihe* in den Variablen $y_1, \dots, y_m$ (um den Punkt z) ist dann die unendliche Summe

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^m} c_\alpha \cdot (y - z)^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^m} c_{\alpha_1 \dots, \alpha_m} \cdot (y_1 - z_1)^{\alpha_1} (y_2 - z_2)^{\alpha_2} \cdots (y_m - z_m)^{\alpha_m} \qquad c_\alpha \in \mathbb{K}$$

Diese unendliche Summe konvergiert möglicherweise für kein $(y_1, \dots, y_m) \neq z = (z_1, \dots, z_m)$. Um die Notation so einfach wie möglich zu halten nehmen wir von nun an, dass $z = 0$ ist.

Wir sagen, dass die obige Reihe in dem Punkt $(y_1, \dots, y_m)$ konvergiert, falls für jede Bijektion (Abzählung) $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0^m$ die Reihe $\sum_{k=1}^\infty c_{\beta(k)} y^{\beta(k)}$ (Multiindexschreibweise) gegen denselben Grenzwert $g \in \mathbb{K}$ konvergiert. Diese Reihe heißt *absolut konvergent* in dem Punkt $(y_1, \dots, y_m)$ falls die Summen $S_d := \sum_{|\alpha| \le d} |c_{\alpha_1 \dots, \alpha_m}| \cdot |y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_m^{\alpha_m}|$ für alle $d \in \mathbb{N}$ beschränkt bleiben. Die Reihe $\sum_\alpha c_\alpha y^\alpha$ konvergiert genau dann absolut, wenn $\sum_{k=1}^\infty c_{\alpha(k)} y^{\alpha(k)}$ für jede Abzählung β absolut konvergiert (dann also gegen denselben Grenzwert). Um Bereiche, in denen eine Potenzreihe absolut konvergiert, beschreiben zu können führen wir den Begriff eines (abg.) Polyzylinders ein: Für $r \in \mathbb{R}_{>0}^m$, $z \in \mathbb{K}^m$ sei $\mathcal{P}_r(z) := \{x \in \mathbb{K}^m : |x_j - z_j| \le r_j, \ j = 1, \dots, m\}$; $\mathcal{P}_r := \mathcal{P}_r(0)$.

Lemma 1.4.19.

i *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

ii *Konvergiert die Reihe $\sum_{|\alpha| \le d} c_\alpha \cdot y^\alpha$ absolut für ein $y = (y_1, \dots, y_n)$ so konvergiert die Reihe $\sum_{|\alpha| \le d} c_\alpha \cdot x^\alpha$ absolut für jedes $x = (x_1, \dots, x_m)$ mit $|x_j| \le |y_j|$, $j = 1, \dots, m$.*

iii *Unter den Voraussetzungen aus ii konvergieren die polynomialen Funktionen* $P_d(x) := \sum_{|\alpha|\le d} c_\alpha x^\alpha$ *auf dem Polyzylinder* $\mathcal{P}_y$ *gleichmäßig gegen die Grenzfunktion* $\psi : \mathcal{P}_y \to \mathbb{K}$ *(d.h., mit* $\psi(x) = \lim_{d\to\infty} \sum_{|\alpha|\le d} c_\alpha \cdot x^\alpha$ *). Wir sagen dann, dass eine solche Reihe* $\sum_{|\alpha|\le d} c_\alpha x^\alpha$ *eine Reihenfunktion* ψ *auf* $\mathcal{P}_y$ *definiert,*

iv *Definiert die Reihe* $\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ *eine Reihenfunktion auf* $\mathcal{P}_y$*, so ist diese Funktion* C^∞*-differenzierbar. Die partielle Differentiation und das Summenzeichen dürfen vertauscht werden:*

$$\partial^\beta\Big(\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha\Big) = \sum_\alpha c_\alpha \partial^\beta(x^\alpha) = \sum_\alpha c_\alpha \cdot \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} \cdot x^{\alpha-\beta}$$

und die Reihe auf der rechten Seite konvergiert absolut und definiert eine Reihenfunktion auf dem gleichen Polyzylinder $\mathcal{P}_y$.

Alle obige Konstruktionen und Aussagen, die die Reihen betreffen, funktionieren genauso gut (mit den offensichtlichen Modifikationen), wenn man statt der Koeffizienten $c_\alpha \in \mathbb{K}$ Koeffizienten c_α aus einem beliebigen Banachraum E nimmt.

Taylorsche Formel in $\mathbf{R}^m$ 1.4.20. *Es sei* $U \subset \mathbb{R}^m$ *offen,* E *ein normierter Raum und* $f : U \to E$ *eine* C^{k+1}*-differenzierbare Abbildung,* $x, h \in \mathbb{R}^m$ *und* $x + th \in U_E$ *für alle* $t \in [0,1]$*. Dann gilt*

$$f(x_1+h_1,..,x_m+h_m) = f(x) + \sum_{1\le\alpha_1+\cdots+\alpha_m\le k} \frac{h_1^{\alpha_1}\cdots h_m^{\alpha_m}}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!} \cdot \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}(x) \quad + \; R^k_{x,f}(h_1,\dots,h_m)$$

wobei $\lim_{h\to 0} \frac{R^k_{x,f}(h)}{\|h\|^k} = 0$*. Ist* $E = \mathbb{R}$ *so läßt sich das Restglied* $R^k_{x,f}$ *auch als*

$$R^k_{x,f}(h) = \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=k+1} \frac{h_1^{\alpha_1}\cdots h_m^{\alpha_m}}{\alpha_1!\cdots\alpha_m!} \cdot \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}(x+\theta h) \qquad \text{für ein } \theta \in [0,1] \text{ schreiben.}$$

In der Multiindexschreibweise 1.4.18 lautet die Taylorformel:

$$f(x+h) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m,\ |\alpha|\le k} h^\alpha \cdot \frac{\partial^\alpha f\,(x)}{\alpha!} + R^k_{x,f}(h)$$

Wir schreiben daher $T^k_{x,f}(h) := \sum_{|\alpha|\le k} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \cdot \partial^\alpha f(x)$ für die Terme bis zur Ordnung k (in den Variablen $h_1,\dots,h_m)$) in der Taylorentwicklung von f und nennen diesen Ausdruck das *Taylorpolynom von* f*, entwickelt um* x *von Grad* k.

Wenn man in der Taylorentwicklung 1.4.20 k gegen ∞ laufen läßt, so bekommt man für eine unendlich oft differenzierbare Funktion die *Taylorreihe* $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m} h^\alpha \cdot \frac{\partial^\alpha f\,(x)}{\alpha!}$ (in den Variablen $h_1,\dots,h_m$). Sie braucht, wenn überhaupt, nicht gegen f auf noch so kleiner Umgebung des Punktes x zu konvergieren. Ist es aber der Fall, so sagt man, dass f in einer Umgebung von x eine *analytische* Funktion ist.

Lemma 1.4.21. *Es sei* E *ein Banachraum und* $f : U_{\mathbb{K}^m} \to E$ *eine* C^∞*-Funktion. Gibt es eine Konstante* $B > 0$ *sowie eine Umgebung* $U(x) \subset \mathbb{K}^m$*, so dass* $\|D^k f(y)\| \le B^k$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$ *und* $y \in U(x)$ *so konvergiert die Taylorreihe* $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^m} h^\alpha \cdot \frac{\partial^\alpha f\,(x)}{\alpha!}$ *lokal gleichmäßig gegen* f *auf jedem Polyzylinder* $\mathcal{P}_r(x)$*, welcher in* $U(x)$ *enthalten ist. Insbesondere ist dann* f *in einer Umgebung von* x *eine analytische Funktion.*

Lokale Extrema.

Definition 1.4.22. Es sei E ein reeller Banachraum und $f : U_E \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $p \in U_E$. Man sagt, f habe in p ein
• *lokales Minimum* falls es eine Umgebung $V(p) \subset U_E$ gibt mit $f(p) \leq f(y)$ für alle $y \in V(p)$;
• *striktes lokales Minimum* falls es eine Umgebung $V(p) \subset U_E$ gibt mit $f(p) < f(y)$ für alle $y \in V(p) \setminus \{p\}$;
• *lokales Maximum* falls es eine Umgebung $V(p) \subset U_E$ gibt mit $f(p) \geq f(y)$ für alle $y \in V(p)$;
• *striktes lokales Maximum* falls es eine Umgebung $V(p) \subset U_E$ gibt mit $f(p) > f(y)$ für alle $y \in V(p) \setminus \{p\}$.

Lemma 1.4.23. (notwendige Bedingung für ein lok. Extremum) *Besitzt eine differenzierbare Funktion $f : U_E \to \mathbb{R}$ in p ein lokales Extremum, so gilt $Df(p) = 0$.*

Definition 1.4.24. Ein Punkt $p \in U_E$ heißt ein *kritischer Punkt* der differenzierbaren Funktion $f : U_E \to \mathbb{R}$ falls $Df(p) = 0$.

Bemerkung 1.4.25. In dem Fall $E = \mathbb{R}^m$ folgt aus der Taylorformel 1.4.20, dass für $f \in C^2(U_{\mathbb{R}^m})$

$$f(x+h) = f(x) + \operatorname{grad} f(x) \cdot h + \frac{1}{2} h^{\mathrm{T}} \cdot H_f(x) \cdot h + R^2_{x,f}(h)$$

gilt, wobei $H_f(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(p)\right)_{1 \leq j,k \leq m}$ und $\lim_{h \to 0} R^2_{x,f}(h)/\|h\|^2 = 0$.
Die Gestalt der Hessematrix entscheidet, ob in einem kritischen Punkt von f ein lokales Extremum vorliegt.

Zur Erinnerung:

Einige Tatsachen aus der linearen Algebra.

• Ist $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung (gegeben durch eine Matrix $A = (a_{jk})_{1 \leq j \leq n,\, 1 \leq k \leq m}$) so gilt: A invertierbar $\iff$ $m = n$ und $\det A \neq 0$. Hierbei ist

$$\det A := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} ,$$

$\mathfrak{S}_n$ die Permutationsgruppe der Elemente $\{1, \dots, n\}$ (d.h., die Menge aller Bijektionen von $\{1, \dots, n\}$ mit Verkettung als Verknüpfung) und

$$(-1)^\sigma := \operatorname{sign}(\sigma) := \prod_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\sigma(k) - \sigma(j)}{k - j} \in \{-1, 1\}$$

Zum Beispiel $\det \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = xw - yz$,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Für Abb zwischen unendlichdim Banachräumen, läßt sich die Determinante nicht sinnvoll definieren.
• Eine symmetrische und stetige $\mathbb{R}$-bilineare Abbildung (2-Form) $b : V \times V \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Hilbertraum V nennt man

positiv definit, wenn $b(v,v) > 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$
positiv semidefinit, wenn $b(v,v) \geq 0$ für alle $v \in V$
negativ definit, wenn $b(v,v) < 0$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$
negativ semidefinit, wenn $b(v,v) \leq 0$ für alle $v \in V$
indefinit, wenn keiner der obigen 4 Fälle vorliegt.

In dem Fall $V = \mathbb{R}^n$ sei $\langle\ ,\ \rangle$ das kanonische Skalarprodukt, d.h, $\langle x,y\rangle = x^{\mathrm{T}} \cdot y$. Für jede symmetrische 2-Form b auf $\mathbb{R}^n$ gibt es eine symmetrische $n \times n$ Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ so dass

$$b(x,y) = x^{\mathrm{T}} \cdot B \cdot y = \langle Bx, y\rangle \tag{1.4.26}$$

wobei Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren aufgefasst werden. Umgekehrt, jede symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definiert eine symmetrische bilineare Form $b(x,y) := x^{\mathrm{T}} \cdot S \cdot y$ auf $\mathbb{R}^n$. In $\mathbb{R}^n$ brauchen wir also nicht zwischen symmetrischen Matrizen und symmetrischen Bilinearformen zu unterscheiden.

• Ein *Eigenwert* einer linearen Abbildung $A : V \to V$ (oder einer $n \times n$ Matrix, aufgefasst als eine lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$) ist ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$, für den es einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit $A(v) = \lambda \cdot v$ gibt. Einen solchen Vektor v nennt man einen *Eigenvektor* von A zum Eigenwert λ. Die Eigenwerte von $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind exakt die Nullstellen des sog. charakteristischen Polynoms (vom Grad n): $P_A(t) := \det(A - t\mathrm{Id})$. $A : V \to V$ heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis von V gibt, die nur aus Eigenvektoren zu Eigenwerten von A besteht. Bzgl. einer solchen Basis ist die darstellende Matrix $\mathsf{M}(A)$ der linearen Abbildung $A : V \to V$ eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge exakt die Eigenwerte von A sind. Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar (z.B. allgemeine Drehungen der Ebene). Dagegen jede $\mathbb{R}$-symmetrische Matrix B (d.h., $B = B^{\mathrm{T}}$) ist diagonalisierbar (mit reellen Eigenwerten). Ist d_+ die Anzahl der positiven Eigenwerte von M und d_- die Anzahl der negativen Eigenwerte von M, so nennen wir (d_+, d_-) den *Typ* von M. Ist S eine symmetrische reelle Matrix, T eine beliebige invertierbare Matrix so ist der Typ von S gleich dem Typ von $T^{\mathrm{T}} \cdot S \cdot T$.

• Das **Kriterium von Sylvester**. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist positiv definit genau dann wenn für alle $k \in \{1,\dots,n\}$ die Hauptunterdeterminanten $\det(a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ positiv sind. Vorsicht: Eine symmetrische Matrix A ist negativ definit genau dann wenn $-A$ positiv definit ist (und nicht wenn alle Hauptdeterminanten negativ sind! Die korrekte Bedingung hier wäre “für alle k sind $(-1)^{k+1} \det(a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ negativ”).

Allgemeiner nennt man eine $k\times k$ Unterdeterminante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m,n \geq k$, die Determinante einer $k\times k$ Untermatrix B von A. Dabei wird solch ein B aus den Einträgen von A gebildet, die nach der Entfernung von irgendwelcher $m-k$ Zeilen und irgendwelcher $n-k$ Spalten aus A entsteht. Z.B. sind

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} b_3 & b_4 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \quad \text{etc. Beispiele von } 2\times 2\text{-Unterdeterminanten von} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

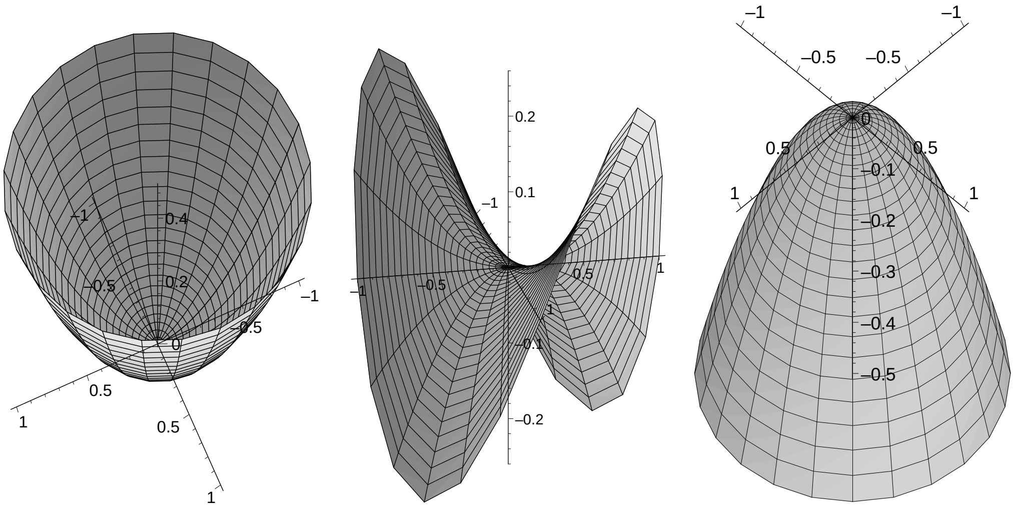
• Es sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform und B die entsprechende symmetrische Matrix wie in (1.4.26). Die (In)Definitheit von b läßt sich von den Eigenwerten von B ablesen:
b (semi)positiv definit $\iff$ alle Eigenwerte von B sind positiv (nichtnegativ)
b (semi)negativ definit $\iff$ alle Eigenwerte von B sind negativ (nichtpositiv)
b indefinit $\iff$ es gibt mindestens zwei Eigenwerte von B mit verschiedenen Vorzeichen.

Jetzt können wir hinreichende Bedingungen für lokale Extrema angeben. Entscheidend hierfür ist 1.4.25 sowie die vorangehenden Bemerkung über Definitheit von symmetrischen reellen Matrizen.

Lemma 1.4.27. *Es sei $f : U_{\mathbb{R}^m} \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion, für die $p \in U$ ein kritischer Punkt ist. Es gilt dann*

$$\begin{aligned} H_f(p) \text{ positiv definit} &\implies f \text{ hat ein striktes lokales Minimum in } p \\ H_f(p) \text{ negativ definit} &\implies f \text{ hat ein striktes lokales Maximum in } p \\ H_f(p) \text{ indefinit} &\implies \text{kein lokales Extremum in } p \end{aligned}$$

Untenstehend sind Graphen von einigen Funktionen $f : U_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$ abgebildet, für die der Nullpunkt ein kritischer Punkt ist; nur die erste und die dritte Funktion hat in 0 auch ein lokales Extremum.



Morse Lemma 1.4.28. *Es sei $f \in C^3(U_{\mathbb{R}^m})$. Angenommen $Df(p) = 0$ und die Hessematrix $H_f(p)$ ist invertierbar. Dann gibt es ein lokales Koordinatensystem $\varphi : U(p) \to \mathbb{R}^m$ mit $\varphi(p) = 0$, so dass in den neuen Koordinaten $\varphi_1, \dots, \varphi_m$*

$$f(\varphi_1, \dots, \varphi_m) = f(0) + \varphi_1^2 + \cdots + \varphi_{d_+}^2 - \varphi_{d_+ +1}^2 - \cdots - \varphi_{d_+ + d_-}^2$$

Hierbei ist (d_+, d_-) der Typ von $H_f(p)$.

Definition 1.4.29. (Untermannigfaltigkeiten) Es sei $\dim E = n$. Eine Teilmenge $M \subset E$ heißt eine *k-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von E* falls M eine abgeschlossenen Teilmenge von E ist und um jeden Punkt $p \in M$ ein lokales Koordinatensystem $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ auf auf einer Umgebung $U(p)$ von p in E existiert, so dass

$$M \cap U(p) = \{q \in U(p) : \varphi_{k+1}(q) = \cdots = \varphi_n(q) = 0\}$$

gilt.

Bemerkung 1.4.30.
• Es sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und $M_c := \{g = c\}$ eine Teilmenge. Dann ist M_c eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit wenn für jedes $p \in M_c$ die Ableitung $Dg(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ den Rang $n - k$ hat, d.h., es existiert eine nichtverschwindende $(n - k) \times (n - k)$ Unterdeterminante der Jacobimatrix $\mathrm{Jac}_p(g) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial x_k}(p)\right)_{1 \le j \le n-k, 1 \le k \le n}$.
• Besitzt $\mathrm{Jac}_p(g)$ eine nichtverschwindende $(n - k) \times (n - k)$ Unterdeterminante, so kann man nach einer eventuellen Umordnung $z_1, \dots, z_k,\ y_1, \dots, y_{n-k}$ der kartesischen Koordinatenfunktionen $x_1, \dots, x_n$

annehmen, dass die Matrix

$$\frac{\partial g}{\partial y}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_{n-k}}(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_{n-k}}{\partial y_1}(p) & \cdots & \frac{\partial g_{n-k}}{\partial y_{n-k}}(p) \end{pmatrix}$$

invertierbar ist. Dann bilden sie Funktionen

$$\varphi_1 := z_1, \ \ldots\ , \varphi_k := z_k \ , \ \varphi_{k+1} := g_1, \ \ldots \ , \varphi_n := g_{n-k}$$

ein lokales Koordinatensystem auf einer Umgebung $V(p) \subset \mathbb{R}^n$ von $p \in M$, welches die Bedingung in der Def 1.4.29 erfüllt.

Der *Tangentialraum* an eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit $M := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = c\}$ in einem Punkt $p \in M$ ist ein Untervektorraum $T_pM \subset \mathbb{R}^n$, definiert durch

$$T_pM = \{v \in \mathbb{R}^n : D_v g(p) = 0\} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \operatorname{grad} g_1(p) \cdot v = 0 \\ \vdots \\ \operatorname{grad} g_{n-k}(p) \cdot v = 0 \end{array} \right\} \tag{1.4.31}$$

Hierbei ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ ein C^1-diffbare Funktion, die die Untermannigfaltigkeit M lokal definiert (d.h., $\mathrm{Rang}(Jac_p(g)) = k$) und $x \cdot y$ bezeichnet das kanonische euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Anschaulich (aber etwas unpräzise) formuliert, ist dieser Untervektorraum, parallel verschoben zum Punkt p, die bestmögliche lineare Approximation der Menge M durch einen linearen Teilraum in der Nähe des Punktes p.

Bemerkung 1.4.32. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit, so gilt

$$T_pM = \left\{\dot\gamma(0) \in \mathbb{R}^n : \text{ für alle differenzierbare Kurven } \gamma : I_\gamma \to M \ \text{ mit } \gamma(0) = p\right\}$$

Extrema mit Nebenbedingungen. Es sei $f : U_E \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Statt f nach lokal maximalen oder minimalen Werten $f(p)$ in einer ganzen Umgebung U in E zu untersuchen, möchte man manchmal nur wissen ob $f(p)$ ein lokales Extremum unter den Werten $f(q)$ bloß für eine Teilmenge $M \subset U(p)$ (d.h., für $q \in M$) annimt. (Man ersetze in der Def. 1.4.22 $V(p)$ gegen $M \cap V(p)$ um eine Definition von lokalen Extrema unter der Nebenbedingung $M = \{g = 0\}$ zu erhalten.) Falls $M = \{g = 0\} \subset E$ eine Untermannigfaltigkeit ist, so gibt es die folgenden Kandidaten für Punkte in M in denen f lokale Extrema haben könnte (d.h., kritische Punkte für f under den Nebenbedingung $g = 0$).

Lagrangesche Multiplikatorenregel 1.4.33. *Es seien $f : U_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$, $g : U_{\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^\ell$ stetig differenzierbar. Hat f in $p \in M := \{x \in U : g(x) = 0\}$ ein lokales Extremum, und besitzt darüberhinaus $\mathrm{Jac}_p g$ eine nichtverschwindende $\ell \times \ell$-Determinante (äquivalent dazu: "die Vektoren $\operatorname{grad} g_1(p), \ldots, \operatorname{grad} g_\ell(p)$ sind linear unabhängig"), so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell \in \mathbb{R}$ (die sog. Lagrangeschen Multiplikatoren), so dass:*

$$Df(p) + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j \cdot Dg_j(p) = 0$$

Man findet also Kandidaten für lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g = 0$ in dem man nach Lösungen $p \in U$ des Gleichungssystems

$$g(p) = 0, \quad \operatorname{grad} f(p) + \sum \lambda_j \cdot \operatorname{grad} g_j(p) = 0$$

für irgendwelche $\lambda_j \in \mathbb{R}$ sucht. Die rechte Gleichung besagt, dass in einem kritischen Punkt p der Gradient $\operatorname{grad} f(p)$ senkrecht zu dem Tangentialraum T_pM sein muss, vgl. 1.4.31

2. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die Bewegung $x(t)$ eines physikalischen Systems genügt oft einer gewissen Differntialgleichung. Mathematisch lassen sich diese Sachverhalte wir folgt formulieren. Es sei $F : Q \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, definiert auf dem Quader $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $Q = \{(s, y) : |s - s_0| \leq r_1, \ \|y - y_0\|_\infty \leq r_2\}$. Eine *gewöhnliche* (im Unterschied zu einer 'partiellen') *Differentialgleichung erster Ordnung* ist dann der Ausdruck $\dot{x} = F(t, x(t))$. Eine lokale Lösung (falls existent) ist eine differenzierbare Kurve, definiert auf einem Interval $I \subset [s_0 - r_1, s_0 + r_1] \subset \mathbb{R}$, $x : I \to B_{r_2}(y_0) \subset \mathbb{R}^n$, so dass

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \qquad \text{für alle } \ t \in I \quad \text{gilt.}$$

Wie allgemein üblich, bezeichnet $\dot{x}(t)$ die Ableitung $Dx(t)$. Ein Anfangswertproblem (AWP) ist die Frage nach der Existenz der Lösung (und deren Eindeutigkeit) des obigen DGL mit der *Anfangsbedingung* $x(s_0) = y_0$.

Theorem 2.1.1. (Picard-Lindelöf) *Es sei $F : Q \to \mathbb{R}^n =: E$ eine stetige Abbildung, definiert auf dem kompakten Quader $Q = \{(s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |s - s_0| \leq r_1, \ \|y - y_0\|_\infty \leq r_2\}$. Erfüllt f die Lipschitz-Bedingung*

$$\|f(t, y) - f(t, z)\| \leq C \cdot \|y - z\|, \quad C > 0, \quad \forall \ (t, y), (t, z) \in Q \ ,$$

so besitzt das Anfangswertproblem (AWP)

$$(*) \qquad \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \qquad x(s_0) = y_0$$

genau eine Lösung $x : I \to Q$ auf einem hinreichend kleinen Intervall $I \subset [s_0 - r_1, s_0 + r_1]$.

Die Idee des **Beweises** ist die folgende: Ist $\gamma : I \to B_{r_2}(y_0)$ eine Lösung von $(*)$, so gilt $\gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^s F(t, \gamma(t))\, dt$. Die rechte Seite dieser Gleichung wird zur Definition der folgenden Abbildung benutzt: Für $I_\delta := [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$ sei $X_\delta := \{c : I_\delta \to \overline{B_{r_2}(y_0)}\} \cap C^0(I_\delta, E)$ und

$$\Psi : X_\delta \to C^0(I_\delta), \qquad \eta \longmapsto \Psi(\eta) \quad \text{mit} \quad \Psi(\eta)(s) := y_0 + \int_{s_0}^s F(t, \eta(t))\, dt$$

Eine Lösung γ des AWP ist eine Fixpunkt von Ψ, d.h. $\Psi(\gamma) = \gamma$, und vice versa. Wenn $\delta < min\{r_1, r_1/\|F\|_Q, 1/C\}$, so gilt $\Psi(X_\delta) \subset X_\delta$ und $\Psi : X_\delta \to X_\delta$ ist eine Kontraktion. Da X_δ eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen Raumes $(C^0(I_\delta), \| \ \|_{I_\delta})$ ist (und daher selbst ein vollständiger metrischer Raum), der Banachsche Fixpunktsatz 1.3.4 kann auf $\Psi : X_\delta \to X_\delta$ angewendet werden. Deren eindeutiger Fixpunkt, die Kurve $\gamma \in X_\delta$ mit $\Psi(\gamma) = \gamma$, ist dann die eindeutig bestimmte (lokale) Lösung unseres AWP. $\square$

Bemerkungen

• Ist $\gamma : I \to B_{r_1}(y_0)$ die Lösung des AWP $(*)$, so ist $\widetilde{\gamma}(t) := \gamma(t+s_0)$ die Lösung des AWP $\dot{\widetilde{\gamma}} = F(t, \widetilde{\gamma})$, $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$, und ist defiiert auf dem Intervall $I - s_0$

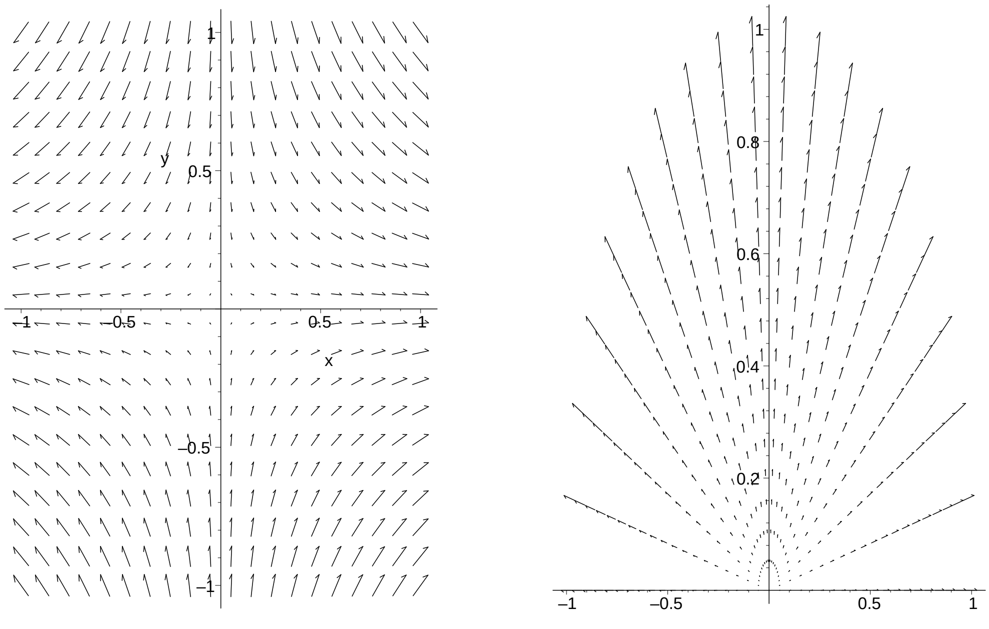
• Für die Existenz und Eindeutigkeit der lokalen Lösung des AWP $(*)$ genügt es bloß anzunehmen, dass F *lokal* Lipschitz-stetig in der zweiten Variable ist, d.h., um jeden Punkt $(s, y) \in Q$ gibt es eine Umgebung $U = (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \times B_r(y) \subset Q$, so dass $\|F(t, z) - F(t, w)\| \leq C_U \cdot \|y - w\|$ für alle (t, z), $(t, w) \in U$ gilt. Diese Bedingung ist automatisch erfüllt wenn F stetig differenzierbar ist.

• **Existenzsatz von Peano**. Wenn man auf die lokale Lipschitz-Stetigkeit (in der zweiten Variable) von F verzichtet, so gibt es immer noch zu jedem $(s_0, y_0) \in Q$ eine lokale Lösung von $(*)$, die dann allerdings nicht mehr eindeutig bestimmt sein muss.

Definition 2.1.2. Es sei $F : I \times U_E \to E$ vorgegeben. Eine Lösung $\gamma : J \to U$ der DGL $\dot{\gamma}(t) = F(t, \gamma(t))$, wobei J ein Intervall $\subset \mathbb{R}$ ist, heißt *maximal*, falls für jede Lösung $\eta : J \to U$ mit $J \supset I$ und $\eta|_I = \gamma$ dann auch schon $I = J$ gilt.

Lemma 2.1.3. *Es sei $U_E \subset E$ eine offene Teilmenge eines Banachraumes E (z.B. $E = \mathbb{R}^n$), ferner $F : I \times U_E \to E$ eine stetige, und darüber hinaus in der zweiten Variable lokal Lipschitz-stetige Abbildung. Dann gibt es zu jedem $y_0 \in U$ eine eindeutig bestimmte maximale Lösung $\gamma_{y_0} : I_{y_0} \to U_E$ der DGL $\dot{x} = F(t, x)$ mit der AB $\gamma_{y_0}(0) = y_0$. Das Definitionsinterval I_{y_0} ist offen.*

Bemerkung. Es sei $X : U_E \to E$ ein Vektorfeld, vgl. 1.4.15. Eine Integralkurve von X ist eine differenzierbare Kurve $\gamma : I \to U_E$, so dass $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ für alle $t \in I$ gilt. Visualisiert man X mit Hilfe von Pfeilen,



so sind in dem linken Bild Hyperbeln, die 4 Halbgeraden enthalten in den beiden Koordinatenachsen sowie der Nullpunkt die Spuren der Integralkurven, während in dem rechten Bild die Halbstrahlen mit Ursprung 0 die Spuren der Integralkurven dieses radialen Vektorfeldes sind.

Eine Lösung von $(*)$ mit der AB $\gamma(t_0) = x_0 \in U_E$ zu finden ist äquivalent zu der Bestimmung einer Integralkurve durch x_0 (bzw. (t_0, x_0)) des entsprechenden Vektorfeldes X_F: In dem autonomen Fall ist das trivialerweise richtig. In dem nicht-autonomen Fall (d.h., wenn F explizit noch von t abhängt) betrachtet man das VF $X_F : I \times U_E \to \mathbb{R} \times E$, $(s, y) \mapsto (1, F(s, y))$; die E-Komponente der Integralkurve zu X_F ist dann die Lösung des AWP $(*)$.

Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen. Es sei I eine Intervall, E ein Banachraum und $A : I \to \mathcal{L}(E,E)$ eine stetige Abbildung. Die folgende DGL

$$(**) \qquad \dot{x}(t) = A(t) \cdot x(t) + b, \qquad b \in E,$$

die ein Spezialfall der bereits diskutierten allgemeinen gewöhnlichen Differentialgleichungen ist, nennt man *linear*. Sie heißt *homogen*, falls $b = 0$ und inhomogen falls $b \neq 0$. In der Notation von 2.1.1 gilt $F : I \times E \to E,\ F(s,y) = A(s) \cdot y$. Die wichtigsten Eigenschaften solcher Differentialgleichungen sind:

- Das Definitionsintervall J jeder maximalen Lösung $\gamma_y : J \to E$ stimmt mit I überein.
- Die Menge $\mathbb{L}_{\text{hom}}$ aller maximalen Lösungen von $(**)$ für $b = 0$ bildet einen Vektorraum der gleichen Dimension wie E.
- Die Menge aller Lösungen der inhomogenen DGL hat die Gestalt $\gamma_p + \mathbb{L}_{\text{hom}}$ wobei γ_p irgendeine (sog. partikuläre) Lösung von $(**)$ ist.
- Falls A nicht von t abhängt, d.h., wir habe eine *konstante* Abbildung $A : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(E,E)$ dann lassen sich die dann auf ganz $\mathbb{R}$ definierten maximalen Lösungen γ_y der homogenen Gleichung folgendermaßen angeben: $\gamma_y(s) = \exp(sA) \cdot y$. In dem inhomogenen Fall läßt sich eine partikuläre Lösung durch die Methode der Variation de Konstanten ermitteln.
- In dem Fall einer allgemeinen linearen DGL (d.h. mit nichtkonstanten Koeffizienten) gibt es keine 'praktikablen' Formeln, die die Lösung in Abhängigkeit von $A(t)$ explizit ausdrücken. Hier muss man jeden Fall einzeln betrachten um mit Glück eine explizite Formel zu bekommen. In dem Spezialfall $E = \mathbb{R}$, die (1-dimensionale) Gleichung $\dot{x}(t) = a(t) \cdot x(t)$, $a : I \to \mathbb{R}$, $s_0 \in I$ mit der AB $\gamma_y(s_0) = y$ hat die Lösung

$$\gamma_y(s) = y \cdot e^{\int_{s_0}^{s} a(t)dt} .$$

3. Funktionentheorie

3.1. Komplexen Zahlen und komplexe Differenzierbarkeit

Auf dem rellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ definiere man die folgende kommutative Multiplikation:

$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 y_1 + x_2 y_2\ ,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Identifiziert man $\mathbb{R}$ mit der Teilmenge $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$, so entspricht die gerade definierte Multiplikation, eingeschränkt auf diese Teilmenge, der gewöhnlichen Multiplikation auf $\mathbb{R}$ (man sagt auch, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to (\mathbb{R}^2, \cdot)$, $t \mapsto (t.0)$ eine injektiver Homomorphismus ist). Es gilt weiter $(x,y) \cdot (1,0) = (1,0) \cdot (x,y) = (x,y)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, d.h., $(1,0)$ ist das Einselement in $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \cdot)$. Das Element $(0,1)$ hat die Eigenschaft $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$. Ferner, jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ hat ein (multiplikatives) Inverse, d.h., $(x,y)^{-1} := (x/(x^2+y^2), -y/(x^2+y^2))$ hat die Eigenschaft

$$\left(\frac{x}{(x^2+y^2)}, -\frac{y}{(x^2+y^2)}\right) \cdot (x,y) = (x,y) \cdot \left(\frac{x}{(x^2+y^2)}, -\frac{y}{(x^2+y^2)}\right) = (1,0)\ .$$

Es gilt auch das Distributivgesetz, d.h. für alle $z, w, u \in \mathbb{R}^2$ haben wir dei Identität

$$(z + w) \cdot u = z \cdot u + w \cdot u$$

Zusammenfassend bildet also die Menge $\mathbb{R}^2$ zusammen mit der üblichen Addition (aus der Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^2$) sowie der gerade definierten Multiplikation "$\cdot$" den sog. (kommutativen) *Körper der komplexen Zahlen*, den wir mit $\mathbb{C}$ bezeichnen. Um unsere Notation zu vereinfachen, schreiben wir i statt $(0,1)$, so dass jedes Element $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in der Gestalt $x+iy$ geschrieben werden kann. Wir schreiben weiter $|z| = |x+iy| = \sqrt{x^2+y^2}$ für die (euklidische) Standardnorm in $\mathbb{C}$ (damit können wir von Konvergenz und Grenzwerten in $\mathbb{C}$ sprechen), sowie $\bar{z} = \overline{x+iy} := x - iy$ ist die komplexe Konjugation.

In diesem Kapitel betrachten wir fast ausschließlich Abbildungen $f : U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, wobei $U_{\mathbb{C}}$ eine offene Teilmenge in dem Körper $\mathbb{C}$ ist. Wir nennen eine solche offene Teilmenge ein *Gebiet*, falls $U_{\mathbb{C}}$ auch noch zusammenhängend ist, vgl. 1.3.5.

Definition 3.1.1. Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ heißt $\mathbb{C}$*-differenzierbar* oder *holomorph in* $z_0 \in \mathbb{C}$ falls der Grenzwert
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$
in $\mathbb{C}$ existiert. Wir schreiben $f'(z_0)$ für diesen Grenzwert. f heißt $\mathbb{C}$*-differenzierbar* (oder holomorph) falls der obige Grenzwert für alle $z_0 \in U$ existiert.

Lemma 3.1.2. *Es seien $f, g : U \to \mathbb{C}$, $h : V \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Dann ist*

i $af + bg : U \to \mathbb{C}$ *holomorph für alle* $a, b \in \mathbb{C}$*;* $(af+bg)' = af' + bg'$

ii $f \cdot g : U \to \mathbb{C}$ *sowie* $f/g : U \setminus \{g = 0\} \to \mathbb{C}$ *holomorph;* $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f \cdot g'$, $(f/g)' = (f' \cdot g - g' \cdot f)/g^2$*;*

iii (Kettenregel) $f \circ h : V \to \mathbb{C}$ *holomorph, falls* $h(V) \subset U$ *gilt;* $(f \circ h)'(z) = f'(h(z)) \cdot h'(z)$.

Wir schreiben $\mathcal{O}(U)$ für die $\mathbb{C}$-algebra aller in jedem Punkt von U $\mathbb{C}$-differenzierbaren Funktionen.

Beispiele holomorpher Funktionen sind komplexe Polynomialfunktionen $P(z) := \sum_{k=0}^n a_k z^k$ (definiert auf ganz $\mathbb{C}$) sowie Reihenfunktionen $f(z) := \sum_{k=0}^\infty a_k(z-z_0)^k$ auf dem Konvergenzgebiet, d.h., auf der offenen Kreisscheibe $B_r(z_0) \subset \mathbb{C}$, wobei nach Cartan-Hadamard
$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$
der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty a_k(z-z_0)^k$ ist. Hierbei wird natürlich vorausgesetzt, dass $r > 0$ gilt. So, z.B. sind
$$e^z := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}, \qquad \sin(z) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad \cos(z) := \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$
auf ganz $\mathbb{C}$ definierte holomorphe Funktionen, die eingeschränkt auf $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ mit den reellen Exponential- sowie trigonometrischen Funktionen übereinstimmen.

Die Konjugationsfunktion $z \mapsto \bar{z}$, deren Potenzen $z \mapsto (\bar{z})^k$ sowie die Betragsfunktion $z \mapsto |z|$ sind Beispiele von Funktionen, die nicht holomorph sind.

Da wir sehr oft mit Potenzreihen befassen werden, führen wir den folgenden allgemeinen Konvergenzbegriff ein:

Definition 3.1.3. Es sei $\sum_{k=0}^\infty f_k$ eine Reihe von Funktionen $f_k : U \to \mathbb{C}$. Mann sagt, dass die Reihe *normal auf* U konvergiert, wenn für jeden Punkt $z \in U$ eine Umgebung $B(z) \subset U$ existiert, so dass die Reihe $\sum_{k=0}^\infty \|f_k\|_{B(z)}$ absolut konvergent ist. Hierbei bezeichente $\|f\|_B$ die Supremumsnorm von f auf B.

Die Partialsummen einer normal konvergenten Reihe konvergieren lokal gleichmäßig gegen eine Funktion $g : U \to \mathbb{C}$. Ist jetzt speziell $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit dem Konvergenzradius r, so konvergiert diese Reihe normal auf der offenen Kugel $B_r(z_0)$ gegen die Reihenfunktion $g(z)$.

Lemma 3.1.4. *Es sei $f : U \to \mathbb{C}$ eine Funktion, aufgefasst als eine Abbildung $f = (f_1, f_2) : U_{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Dann ist f $\mathbb{C}$-diffbar in $z_0 = x_0 + iy_0$ genau dann wenn (f_1, f_2) total differenzierbar (im Sinne* 1.4.3.*c) ist, und darüberhinaus*

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0)$$

gilt.

Folgerungen:
• Der Real- und Imaginärteil einer holomorphen Funktion f sind harmonische Funktionen, d.h. $\Delta(\operatorname{Re} f) = \Delta(\operatorname{Im} f) = 0$

3.2. Integralformel von Cauchy

Eine Kurve (Weg) $\gamma : I \to U \subset \mathbb{C}$ nennt man stückweise stetig differenzierbar, falls γ stetig ist, und darüberhinaus eine Unterteilung $a = t_1 < t_2 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = b$ des Intervalls $I = [a, b]$ existiert, so dass alle Einschränkungen $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ für alle $j = 1, \ldots, n$ stetig differenzierbar sind. (In den Randpunkten t_j und t_{j+1} von $[t_j, t_{j+1}]$ wird dann für γ nur die Existenz der einseitigen Grenzwerte $\lim_{s \to t_k} (\gamma(s) - \gamma(t_k))/(s - t_k)$ gefordert; i.A. gilt dann

$$\lim_{\substack{s \to t_k \\ s < t_k}} \frac{\gamma(s) - \gamma(t_k)}{s - t_k} \neq \lim_{\substack{s \to t_k \\ s > t_k}} \frac{\gamma(s) - \gamma(t_k)}{s - t_k}$$

und $\gamma'|_{[t_j, t_{j+1}]}$ muss stetig sein.) Es sei jetzt $f : U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma : I \to U_{\mathbb{C}}$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve. Dann definieren wir

$$\int_\gamma f(z)\, dz := \sum_{j=1}^{n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(\gamma(s)) \cdot \gamma'(s)\, ds$$

und nennen $\int_\gamma f(z)\, dz$ das *Kurven-* oder *Wegintegral* entlang von γ.

Bemerkung 3.2.1. Es sei $\gamma : I = [a, b] \to U_{\mathbb{C}}$ (allgemeiner $U_{\mathbb{R}^n}$) eine stückweise stetig differenzierbare Kurve sowie $\varphi, \psi, f \in C^0(U(\gamma(I)))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:
• Wie aus der Theorie der Riemannschen Integration bekannt, gilt auch für Wegintegrale:

$$\int_\gamma \big(\alpha\varphi(z) + \beta\psi(z)\big)\, dz = \alpha \int_\gamma \varphi(z)\, dz + \beta \int_\gamma \psi(z)\, dz, \qquad \|\int_\gamma \psi(z)\, dz\| \leq \int_\gamma \|\psi(z)\|\, |dz|,$$

• Ist Φ eine Stammfunktion von φ, so gilt $\int_\gamma \varphi(z)\, dz = \Phi(\gamma(b)) - \Phi(\gamma(a))$
• Der Wert von $\int_\gamma f(z)\, dz$ hängt nur von der Spur $Sp(\gamma) = \gamma(I)$ und nicht von der Wahl der Parametrisierung von $Sp(\gamma)$: Ist nämlich $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar und $\mu : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ ein orientierungserhaltender (stückweiser) Diffeomorphismus, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\gamma \circ \mu} f(z)\, dz$$

Ist jedoch μ orientierungsumkehrend, d.h., $\mu' < 0$, so gilt $\int_{\gamma\circ\mu} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$.
• Besteht der ∂M Rand einer Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ aus stückweise stetig differenzierbaren Kurven, so schreibt man $\int_{\partial M} f(z)\,dz$ statt explizit den Rand zu prametrisieren. Dabei wird stillsschweigen angenommen, dass der Rand gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

Falls für eine Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt, so heißt γ geschlossen. Zwei Wege, $\gamma, \delta : [a,b] \to U \subset \mathbb{C}$, mit gemeinsamen Endpunkten heißen *in U homotop*, falls eine stetige Abbildung $H : [a,b] \times [0,1] \to U$ gibt, so dass $H(t,0) = \gamma(t)$, $H(t,1) = \delta(t)$ für alle $t \in [a.b]$ sowie $\gamma(a) = H(a,s) = \delta(a)$, $\gamma(b) = H(b,s) = \delta(b)$ für alle $s \in [0,1]$. Salopp formuliert heißt das, dass die beiden Wege γ und δ innerhalb von U stetig ineinander deformierbar sind. Es ist dabei wichtig, dass alle 'Zwischenwege' $t \mapsto H(t,s)$ inerhalb der Menge U bleiben.

Satz von Cauchy 3.2.2. (für Rechtecke) *Es sei $R = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ ein achsenparalleles Rechteck, das in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{C}$ enthalten ist, und $f : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

<u>Zusatz.</u> Ist $R \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck, $U(R) \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung von R und $\Psi : U(R) \to U_\mathbb{C}$ eine beliebige C^1-Abbildung, dann gilt auch

$$\int_{\Psi(\partial R)} f(z)\,dz = 0 \qquad \textit{für jede holomorphe Funktion } f : U_\mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

Idee des **Beweises** für $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$: Für die gegebene holomorphe Funktion f konstruiere man eine Folge von immer kleiner werdenden Rechtecken $R \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots$ wie folgt: Man zerlege das Ausgangsrechteck R in 4 kongruente Rechtecke $R^{(1)}, \ldots, R^{(4)}$. Da sich die Integration über Wegstücke innerhalb von R weghebt, gilt

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_{\partial R^{(1)}} f(z)\,dz + \int_{\partial R^{(2)}} f(z)\,dz + \int_{\partial R^{(3)}} f(z)\,dz + \int_{\partial R^{(4)}} f(z)\,dz$$

Es bezeichne R_1 dasjenige Rechteck aus $R^{(1)}, \ldots, R^{(4)}$, für das $|\int_{\partial R^{(k)}} f(z)\,dz| = |\int_a^b f(\gamma^{(k)}(t))\cdot\dot\gamma^{(k)}(t)|\,dt$ maximal ist. Dann gilt

$$\Big|\int_{\partial R} f(z)\,dz\Big| \le 4\cdot\Big|\int_{\partial R_1} f(z)\,dz\Big|$$

Sukzessiv gewinnt man auf diesem Wege eine Folge der Rechtecke $R_k \subset R$ mit $|\int_{\partial R} f(z)\,dz| \le 4^k|\int_{\partial R_k} f(z)\,dz|$, sowie $\operatorname{diam}(R_k) = 2^{-k}\operatorname{diam}(R)$ und $u(R_k) = 2^{-k}u(R)$ wobei $u(R_k)$ den Umfang des Rechtecks R_k bezeichnet. Wegen Kompaktheit von R und $\operatorname{diam}(R_k) \to 0$ für $k \to \infty$ gilt $\bigcap R_k = \{z_0\}$. Da f in z_0 $\mathbb{C}$-differenzierbar ist, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0$, so dass $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + r(z-z_0)$ mit $|r(z-z_0)| \le \varepsilon|z-z_0|$ für alle $z \in B_\delta(z_0)$ gilt. Wähle jetzt n groß genug, so dass $\operatorname{diam}(R_n) < \delta$. Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\Big|\int_{\partial R} f(z)\,dz\Big| &\le 4^k\Big|\int_{\partial R_k} f(z)\,dz\Big| = 4^k\Big|\int_{\partial R_k} f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + r(z-z_0)\Big| \le \\
&\le 4^k\int_{\partial R_k} |r(z-z_0)|\,|dz| \le 4^k\varepsilon\int_a^b |\gamma_k(t) - z_0|\cdot|\dot\gamma_k(t)|\,dt \le \\
&\le 4^k\varepsilon 2^{-k}\operatorname{diam}(R)\cdot 2^{-k}u(R) = \varepsilon\cdot\operatorname{diam}(R)\cdot u(R)
\end{aligned}$$

Dabei ist $\gamma_k : [a,b] \to \partial R_k \subset \mathbb{C}$ die stückweise stetig differenzierbare Kurve, die den Rand von R_k parametrisiert, und $\int_a^b |\dot\gamma_k(t)|\,dt$ die Länge des Weges γ_k, d.h., der Umfang von R_k. □

Typische Beispiele für Bilder $\psi(\partial R)$ zeigen die folgende Beispiele:

• $\Psi : [r_1, r_2] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto z_0 + x \cdot e^{-iy}$. Dann ist das Bild von $[r_1, r_2] \times [0, 2\pi]$ ein Kreisring $\overline{B}_{r_2}(z_0) \setminus B_{r_1}(z_0)$ oder die abg. Kreisscheibe $\overline{B}_{r_2}(z_0)$ falls $r_1 = 0$. Hier gilt es $\int_{\Psi(\partial R)} \cdots = \int_{\partial B_{r_2}(z_0)} \cdots - \int_{\partial B_{r_1}(z_0)} \cdots$.

• Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Kurven, so ist $\Psi : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$, $(s, t) \mapsto (1-t)\gamma_0(s) + t\gamma_1(s)$ eine C^1-Abbildung, die den Rand des Rechteck R auf Spur(γ_0), Spur(γ_1) sowie die Abschnitte $\overline{\gamma_0(a)\,\gamma_1(a)}$ sowie $\overline{\gamma_0(b)\,\gamma_1(b)}$ abbildet.

Folgerungen aus dem Satz von Cauchy

In den folgenden Aussagen sei immer $f : U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine auf ganz $U_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-differenzierbare Funktion.

Cauchy-Formel 3.2.3. (für Kreisscheiben) *Ist $\overline{B}_r(z_0) \subset U_{\mathbb{C}}$ so gilt für jedes $z \in B_r(z_0)$:*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

Lokale Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe 3.2.4. *Für jede Kreisscheibe $\overline{B}_r(z_0) \subset U_{\mathbb{C}}$ gilt für alle $z \in B_r(z_0)$:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad \textit{mit} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw$$

und der Konvergemnzradius der obigen Potenzreihe ist mindestens r. Es gilt die folgende Abschätzung

$$|c_k| \le \frac{\|f\|_{\overline{B}_r(z_0)}}{r^k} \tag{3.2.5}$$

Theorem von Goursat 3.2.6. *f ist ∞-oft $\mathbb{C}$-differenzierbar auf $U_{\mathbb{C}}$.*

Theorem von Liouville 3.2.7. *Ist $U_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$ und $|f| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ beschränkt, so muss f bereits konstant sein.*

Theorem von Morera 3.2.8. *Es sei $\varphi : U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung, so dass für jedes Dreieck $\Delta \subset U_{\mathbb{C}}$ $\int_{\partial\Delta} \varphi(z)\, dz = 0$ (äquivalent: für jedes Rechteck $R \subset U_{\mathbb{C}}$ $\int_{\partial R} \varphi(z)\, dz = 0$) gilt, dann ist φ holomorph auf $U_{\mathbb{C}}$*

Unter einem Dreieck verstehen wir die abgeschlossene Fläche $\Delta = \Delta_{A,B,C} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, die durch beliebige nicht kolineare drei Punkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ aufgespannt wird.

Identitätssatz 3.2.9. *Es sei (z_n) eine konvergente Folge von paarweise verschiedenen komplexen Zahlen mit $\lim z_n \in U_{\mathbb{C}}$. Gilt $f(z_n) = 0$ für alle n und ist $U_{\mathbb{C}}$ eine Gebiet (d.h., zusammenhängend), so folgt $f \equiv 0$. Insbesondere gilt für zwei holomorphe Funktionen $f, g : U_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, die in allen Punkten z_n übereinstimmen: $f = g$ auf $U_{\mathbb{C}}$.*

Es sei ζ eine Nullstelle von f. Definiere die Verschwindungsordnung von f in ζ als

$$\operatorname{ord}_\zeta(f) := \min\{k : f^{(k)}(\zeta) \ne 0\}$$

Ist $h : U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in ζ eine Nullstelle von Ordnung 1 hat, so gibt es nach dem Satz über die Umkehrfunktion 1.4.14 eine offene Umgebung $V(\zeta) \subset U$, die vermöge h diffeomorph auf $B_\rho(0)$ abgebildet wird.

Vorbereitungssatz 3.2.10. *Es sei ζ eine Nullstelle von f. Falls f nicht konstant ist, gilt* $\operatorname{ord}_\zeta(f) =: k < \infty$*, und es existiert eine holomorphe Funktion h, die auf einer Umgebung $V(\zeta)$ von ζ definiert ist und in ζ von Ordnung 1 verschwindet (d.h., lokal biholomorph ist), so dass $f(z) = h(z)^k$ für alle $z \in V(\zeta)$ gilt.*

Bemerkung. Aus dem Satz über die Umkerfunktion folgt, dass man um ζ eine Umgebung $V_\varepsilon \subset U_\mathbb{C}$ findet, so dass $h : V_\varepsilon \to B_\varepsilon(0)$ ein Diffeomorphismus ist, der wegen 3.1.4 sogar biholomorph ist.

Satz über die Gebietstreue 3.2.11. *Ist $U_\mathbb{C}$ eine Gebiet, so ist das Bild $f(U_\mathbb{C})$ ebenfalls ein Gebiet, vorausgesetzt dass f nicht konstant ist.*

Maximumsprinzip 3.2.12. *Hat $|f|$ in einem Punkt $z \in U_\mathbb{C}$ ein lokales Maximum, so ist f konstant auf $U_\mathbb{C}$, vorausgesetzt dass $U_\mathbb{C}$ zusammenhängend ist.*

3.3. Isolierte Singularitäten und Laurent-Reihen

Definition 3.3.1. Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$ und $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$ Man sagt, dass f in z_0

(a) eine *hebbare Singularität* besitzt, falls sich f zu einer auf ganz U holomorphen Funktion fortsetzten läßt, d.h., es gibt $\widehat{f} \in \mathcal{O}(U)$ mit $\widehat{f}(z) = f(z)$ für alle $z \in U \setminus \{z_0\}$;

(b) eine *Polstelle er Ordnung m* falls in z_0 $(z-z_0)^m \cdot f(z)$, nicht jedoch $(z-z_0)^{m-1} \cdot f(z)$, eine hebbare Singularität besitzt.

(c) eine *wesentliche Singularität* besitzt, falls f in z_0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle hat.

Lemma 3.3.2. *Es sei $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\})$, so dass für eine punktierte Kreisscheibe $B_r^\times(z_0) := B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset U$ die Einschränkung von $|f|$ auf $B_r^\times$ beschränkt ist. Dann hat f in z_0 eine hebbare Singularität.*

Lemma 3.3.3. *Falls die holomorphe Funktion $f : U \setminus \{z_0\}$ in $z_0 \in U$ eine Polstelle der Ordnung m besitzt, so gibt es $h \in \mathcal{O}(U)$ mit $h(z_0) \neq 0$ mit*

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^m}$$

Es gilt dann $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

Eine holomorphe Funktion auf $B_r^\times(z_0)$, die in z_0 eine Polstelle hat läßt sich wegen $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ sicherlich nicht zu einer stetigen Funktion $B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ fortsetzen. Man kann jedoch den Wertebereich auf folgende Weise sinnvoll um einen Punkt, den sog. unendlich fernen Punkt, erweitern:

Konstruktion der Riemannschen Zahlenkugel. Die Menge $\mathbb{C} \,\dot\cup\, \{pt\}$ wird mit $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ identifiziert in dem man $\mathbb{C}$ mit $S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ (Sphäre ohne Nordpol) identifiziert. Dazu verwendet man die stereographische Projektion von dem Nordpol aus:

$$\varphi : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (x, y, z) \longmapsto \frac{x + iy}{1 - z}$$

$$\varphi^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}, \qquad w \longmapsto \frac{(2 \operatorname{Re} w, 2 \operatorname{Im} w, |w|^2 - 1)}{1 + |w|^2}$$

Die Menge S^2, zusammen mit der Einschränkung der euklidischen Metrik in $\mathbb{R}^3$ ist ein metrischer Raum (die auf S^2 induzierte Metrik d nennt man *chordal*). Durch die Identifizierung von $\mathbb{C}$ mit

$S^2 \setminus \{N\}$ hat man auf $S^2 \setminus \{N\}$ holomorphe Koordinate eingeführt und der Norpol $N = (0, 0, 1)$ wird dann mit dem unendlich fernen Punkt ∞ identifiziert, der nicht in $\varphi^{-1}(\mathbb{C})$ enthalten ist. Diese 2-dimensionale Sphäre mit den oben definierten Identifikationen nennt man die Riemannsche Zahlensphäre (oder Kugel) und bezeichnet mit $\overline{\mathbb{C}}$.

Definiert man mittels der Abbildung (konjugierte stereographische Projektion vom Südpol $S = (0, 0, -1)$ aus)

$$\psi : S^2 \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad (x, y, z) \longmapsto \frac{x - iy}{1 + z}$$

$$\psi^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow S^2 \setminus \{S\}, \qquad w \longmapsto \frac{(2\operatorname{Re} w, -2\operatorname{Im} w, 1 - |w|^2)}{1 + |w|^2}$$

eine weitere Karte (vgl. 1.4.13, wobei wir jetzt anstelle eines abstakten Vektorraumes E die Menge S^2 benutzten und die Karten auf den Umgebungen $U_N := S^2 \setminus \{N\}$ sowie $U_S := S^2 \setminus \{S\}$ definieren), so wird jetzt $S^2 \setminus \{S\}$ mit $\mathbb{C}$ identifiziert, und der unendlich ferner Punkt $\infty = N$ entspricht jetzt dem Nullpunkt in $\mathbb{C} = \psi(S^2 \setminus \{S\})$. Der Koordinatenwechsel $\varphi \circ \psi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat die Gestalt $w \mapsto 1/w$, ist also eine biholomorphe Abbildung.

Die Konstruktion der Riemannschen Sphäre erlaubt jede holomorphe Abbildung $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$, die in z_0 eine Polstelle hat, d.h., $f(z) := h(z)/(z - z_0)^m$, als eine stetige, sogar holomorphe Abbildung $\widehat{f} : U \to \overline{\mathbb{C}}$ aufzufassen. Hierbei $\widehat{f}(z) := \begin{cases} \varphi^{-1} \circ f(z) & \text{falls } z \neq z_0 \\ N & \text{falls } z = z_0 \end{cases}$. Die Holomorphie von $\widehat{f}$ in dem Punkt z_0 bedeutet, dass die Abbildung $\psi \circ \widehat{f}$, in unserem Fall durch $u \mapsto (u - z_0)^m/h(u)$ gegeben, holomorph in einer Umgebung von z_0 ist. Die oben konstruierte Riemansche Sphäre ist ein Beispiel einer eindimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit. Eine Abbildung $g : U_{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist deinitionsgemäß holomorph, wenn die ensprechenden Abbildungen $\psi \circ g$ und $\varphi \circ g$ mit Werten in $\mathbb{C}$ holomorph in dem üblichen Sinne sind.

Von nun an werden wir den Punkt $N \in S^2 \cong \overline{\mathbb{C}}$ mit ∞ bezeichnen.

Definition 3.3.4. Eine stetige Abbildung $f : U \to \overline{\mathbb{C}}$, für die $f^{-1}(\infty)$ eine diskrete Teilmenge von U ist, so dass $f : U \setminus f^{-1}(\infty) \to \mathbb{C} \subset \overline{\mathbb{C}}$ holomorph ist, und in jedem Punkt aus $f^{-1}(\infty)$ eine Polstelle vorliegt, eine *meromorphe Funktion*.

Die Menge aller meromorphen Funktionen auf einem Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ bilden eine Körper.

Die holomorphe Funktionen $\mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ $z \mapsto \exp(-1/z)$, $\sin(1/z)$ besitzen in 0 wesentliche Singularitäten.

Satz von Weierstraß-Caserati 3.3.5. *Besitzt $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{z_0\}$ in z_0 eine wesentliche Singularität, so ist für jedes $\varepsilon > 0$ das Bild $f(B_\varepsilon^\times(z_0))$ dicht in $\mathbb{C}$.*

Es gibt sogar die folgende Verschärfung dieser Aussage, bekannt als der Satz von Picard: *Das Bild $f(B_\varepsilon^\times(z_0))$ für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ stimmt bis auch höchstens einen Ausnahmepunkt mit ganz $\mathbb{C}$ überein.*

Definition 3.3.6. Eine *Laurentreihe* mit dem Entwicklungspunkt z_0 ist der Ausdruck

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \qquad a_k \in \mathbb{C} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

wobei $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}$ der *Hauptteil* und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ der *Nebenteil* der Laurentreihe heißt.

Um das Konvergenzverhalten zu klären, sei $1/r$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}w^k$ und R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$. Dann konvergiert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

lokal gleichmäßig (normal) auf $\mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(z_0)$ gegen eine holomorphe Funktion $f_- : \mathbb{C} \setminus \overline{B}_r(z_0) \to \mathbb{C}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ lokal gleichmäßig (normal) auf $B_R(z_0)$ gegen die holomorphe Funktion $f_+ : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$. Gilt $0 \le r < R$, so sagen wir, dass die Laurentreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ auf dem Kreisring $K := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$ konvergiert. In diesem Fall definert die Laurentreihe eine holomorphe Funktion auf K, welche per definitionen die Summe der durch den Hautteil und durch den Nebenteil definierten holomorphen Funktionen, also $f_- + f_+$, ist. Ist der Hauptteil einer Laurentreihe 0, so handelt sich bei $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ um eine gewöhnliche Potenzreihe.

Entwicklungssatz II 3.3.7. *Es sei f eine in einem Kreisring $K := \{r < |z-z_0| < R\}$ holomorphe Funktion. Dann gibt es für alle $k \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmte Zahlen $c_k \in \mathbb{C}$, so dass die Laurentreihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

auf K gegen f konvergiert. Es gilt ferner

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}}\, dw \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

für alle ρ mit $r < \rho < R$.

Lemma 3.3.8. *Es sei $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die Laurentreihe einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(B_R^{\times}(z_0))$. Dann besutzt f eine hebbare Singularität in z_0 genau dann wenn der Hauptteil der Laurentreihe verschwindet. f besitzt in z_0 einen Pol der Ordnung m genau dann wenn $a_{-m} \neq 0$ und $a_k = 0$ für alle $k < -m$. Ferner hat f in z_0 eine wesentliche Singularität genau dann wenn unendlich viele der Koeffizienten a_k mit $k \in -\mathbb{N}$ nicht verschwinden.*

Definition 3.3.9. Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Kurve, $\tau \in [a,b]$ und $B_r(\gamma(\tau))$ eine Kreisscheibe. Wir schreiben I_τ für das maximale in $[a,b]$ offene Teilintervall $I_\tau \subset [a,b]$, für das $\gamma(I_\tau) \subset B_r(\gamma(\tau))$ und $\tau \in I_\tau$ gilt.

Eine *Kreiskette auf einer stetigen Kurve* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ besteht aus einer Unterteilung $a = \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_{n+1} = b$ sowie den offenen Kugeln $B_{r_j}(\gamma(\tau_j)) \subset \mathbb{C}$, so dass die Intervalle $I_{\tau_1}, \dots, I_{\tau_{n+1}}$ die Ketteneigenschaft $I_{\tau_j} \cap I_{\tau_{j+1}} \neq \varnothing$ für alle $j \in \{1, \dots, n+1\}$ haben.
Falls $U \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge ist und alle Kreisscheiben $B_{r_j}(\gamma(\tau_j))$ in U enthalten sind, so sprechen wir von einer *Kreiskette auf einer stetigen Kurve γ in U*.

Definition 3.3.10. Es sei jetzt $\mathcal{K} := (\gamma, \tau_j, B_{r_j})$ eine Kreiskette auf einer stetigen Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $f := f_1 \in \mathcal{O}(B_{r_1}(\gamma(\tau_1)))$. Eine analytische Fortsetzung von f entlang der Kreiskette $\mathcal{K}$ besteht aus holomorphen Funktionen $f_j \in \mathcal{O}(B_{r_j}(\gamma(\tau_j)))$ für alle j, so dass

$$f_j\big|_{B_{r_j}(\gamma(\tau_j)) \cap B_{r_{j+1}}(\gamma(\tau_{j+1}))} = f_{j+1}\big|_{B_{r_j}(\gamma(\tau_j)) \cap B_{r_{j+1}}(\gamma(\tau_{j+1}))}$$

für alle $j = 1, \dots, n$ gilt. Jede Familie von holomorphen Funktionen $f_j \in \mathcal{O}(B_{r_j}(\gamma(\tau_j)))$, die die obige Bedingung erfüllen, nennen wir eine analytische oder holomorphe Fortsetzung (von f_1) entlang $\mathcal{K}$.

Definition 3.3.11. Homotopie von Kurven Es sei (X, d) ein metrischer Raum und γ_0, γ_1 zwei stetige Kurven $[a, b] \to X$. Gilt $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ sowie $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$, so nennt man γ_0 und γ_1 *homotop in* X falls es eine stetige Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \to X$ mit $H(t, 0) = \gamma_0(t)$ sowie $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ für alle $t \in [a, b]$ gibt. Die Abbildung H nennt man eine *Homotopie* zwischen γ_0 und γ_1. Eine geschlossene Kurve $\gamma : [a, b] \to X$ heißt *nullhomotop*, falls γ homotop zu der konstanten Kurve $[a, b] \to \{\gamma(a)\} \subset X$ ist.

Lemma 3.3.12. *Es seien zwei Kreisketten $(\gamma, \tau_j, B_{r_j})$ und $(\gamma, \tau'_j, B'_{r'_j})$ auf der gleichen Kurve γ und zwei analytischen Fortsetzungen: (f_j) entlang (γ, τ_j, B_r) und (g_j) entlang $(\gamma, \tau'_j, B'_{r'_j})$, gegeben. Gilt $f|_{B_\rho(\gamma(a))} = g|_{B_\rho(\gamma(a))}$ für ein hinreichend kleines ρ so gilt auch $f_n = g_{n'}$ auf einer kleinen Umgebung von $\gamma(b)$.*

Wir sagen daher, dass eine holomorphe Funktion $f \in \mathcal{O}(B_{r_1}(\gamma(a))$ längst γ holomorph fortsetzbar ist, falls es irgendeine Kreiskette auf γ, und eine analytische Fortsetzung (f_j) längst dieser Kreiskette gibt.

Lemma 3.3.13. *Es seien $(\gamma, \tau_j, B_{r_j})$ eine Kreiskette auf $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, $(\delta, \tau'_j, B'_{r'_j})$ eine Kreiskette auf $\delta : [a, b] \to \mathbb{C}$ sowie zwei analytischen Fortsetzungen: (f_j) entlang (γ, τ_j, B_r) und (g_j) entlang $(\delta, \tau'_j, B'_{r'_j})$, gegeben. Es wird ferner angenommen, dass $h := f|_{B_\rho(\gamma(a))} = g|_{B_\rho(\gamma(a))}$ für ein hinreichend kleines $\rho > 0$ gilt. Sind γ und τ homotop mit der Homotopie $H : [a, b] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ und ist h holomorph fortsetzbar entlang $t \mapsto H(t, s)$ für jedes $s \in [0, 1]$ so gilt auch $f_n = g_{n'}$ auf einer kleinen Umgebung von $\gamma(b) = \delta(b)$.*

Lemma 3.3.14. *Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\gamma : I \to U$ eine beliebige stetige Kurve. Dann hat f eine Stammfunktion F_γ entlang γ, d.h., es existiert eine analytische Fortsetzung (F_j) entlang einer Kreiskette $(\gamma, \tau_j, B_{r_j})$ auf γ, so dass $F'_j(z) = f(z)$ auf $B_{r_j}(\gamma(\tau_j))$ für alle j gilt.*

Motiviert durch die Tatsache, dass für eine (stäuckweise) differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to U$ sowie $f \in \mathcal{O}(U)$ das Integral $\int_\gamma f(z)\, dz$ durch $F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ ausgedrückt werden kann, vorausgesetzt, dass F eine Stammfunktion von f auf U ist, definieren wir jetzt für eine bloß stetige Kurve $\gamma : I \to U$

$$\int_\gamma f(z)\, dz := F_\gamma(\gamma(b)) - F_\gamma(\gamma(a))$$

Hierbei ist F_γ ist eine Stammfunktion von f entlang γ wie in 3.3.14 Hiermit erhält man die folgende Verschärfung des Satzes von Cauchy:

Theorem 3.3.15. *Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\gamma, \delta : I \to U$ zwei in U homotope Kurven. Dann gilt*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_\delta f(z)\, dz$$

Integralformel von Cauchy in der Umlaufszahlversion 3.3.16. *Es sei $f \in \mathcal{O}(U)$ und $\gamma : I \to U$ eine in U nullhomotope stetige (geschlossene) Kurve. Dann gilt für jedes $a \in U$, welches nicht auf $\gamma(I)$ liegt:*

$$\nu_\gamma(a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz$$

Herbei bezeichnet $\nu_\gamma(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)}$ die Umlaufszahl der geschlossenen Kurve γ um den Punkt a. Sie läßt sich auch anschaulicher als die Differenz $(\theta_\gamma(b) - \theta_\gamma(a))/2\pi$ definieren, wobei $\theta_\gamma : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, für die

$$\exp(i\theta_\gamma(t)) = \frac{\gamma(t) - a}{|\gamma(t) - a|} \qquad \forall\, t \in I$$

gilt.

Definition 3.3.17. Es sei c eine isolierte Singularität von $f \in \mathcal{O}(B_r^\times(c))$ und $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k(z-c)^k$ ihre Laurentreihe. Dann heisst

$$\mathrm{Res}_c(f) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B_\varepsilon(c)} f(\zeta)\, d\zeta = a_{-1}$$

das *Residuum* von f an der Stelle c.

Residuensatz 3.3.18. *Es sei $S \subset U$ eine diskrete Teilmenge, die die isolierten Singularitäten einer holomorphen Funktion $f \in \mathcal{O}(U \setminus S)$ enthält. Falls $\gamma : I \to U \setminus S$ eine stetige geschlossene Kurve ist, die in U nullhomotop ist, so gilt:*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{s\in S} \nu_\gamma(s)\cdot \mathrm{Res}_s(f)\ .$$

Insbesondere ist die Summe auf der rechten Seite endlich.

Anwendungen.
• Es sei $R(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, $\deg Q \geq \deg P + 2$ und $R(x)$ hat keine Polstellen auf der reellen Achse. dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t)\, dt = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}_c(R)$$

• Es sei $R(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, $\deg Q \geq \deg P + 1$ und $R(x)$ hat keine Polstellen auf der reellen Achse. Dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(t)e^{it}\, dt = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}_c(R(z)\cdot e^{iz})$$

Für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{c\} \to \mathbb{C}$ schreiben wir

$$HW\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\int_{-\infty}^{c-\varepsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\varepsilon}^{\infty} f(x)\, dx\Big)$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert.
• Es sei $R(z) = P(z)/Q(z)$ eine rationale Funktion, $\deg Q \geq \deg P + 1$ und $R(t)$ habe an den Stelle $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{R}$ Polstellen der Ordnung 1. Dann gilt

$$HW\int_{-\infty}^{\infty} R(t)e^{it}\, dt = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, c>0} \mathrm{Res}_c(R(z)\cdot e^{iz}) + \pi i \sum_{b_j} \mathrm{Res}_{b_j}(R(z)\cdot e^{iz})$$

• Es sei $r(x,y) = p(x,y)/q(x,y)$ eine rationale Funktion in zwei Variablen. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} r(\cos(x), \sin(x))\, dx = \frac{1}{i}\int_{\partial B_1(0)} r\Big(\frac{1}{2}\big(z+\frac{1}{z}\big), \frac{1}{2i}\big(z-\frac{1}{z}\big)\Big)\ \frac{dz}{z}$$