Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
20.11.2014
Blatt 6

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 4: Sei (K, P) ein archimedisch angeordneter Körper (man denke an $\mathbb{R}$) und $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in K, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren $a_n, b_n \in K$ mit $a_n < b_n$ und $[a_n, b_n] = I_n$. Man nennt die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung in K, falls folgende Eigenschaften gelten:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_{n+1} \subseteq I_n$, also $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Ein Element $x \in K$ heißt Kern von $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass in K genau dann jede Cauchy-Folge konvergiert, wenn jede Intervallschachtelung in K einen Kern besitzt.

(*Hinweis:* Betrachten Sie für eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Intervalle der Form $[x_{n_k} - \frac{1}{2^k}, x_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ mit einer geeigneten Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und betrachten Sie für die andere Richtung die Folge der Randpunkte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)

Beweis:

(i) Konvergiere jede Cauchy-Folge in K und sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung.

Behauptung: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_N - a_N| = b_N - a_N < \varepsilon$. Seien weiter $n, m \geq N$ mit $n \geq m$. Dann gilt $a_n, a_m \in [a_N, b_N]$, also $a_n \leq b_N$ und $a_N \leq a_m$, und somit folgt $|a_n - a_m| = a_n - a_m \leq b_N - a_N < \varepsilon$.

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die nach Voraussetzung gegen ein Element $x \in K$ konvergiert.

Behauptung: Das Element x ist ein Kern von $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Sei $k \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend und die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt $a_k \leq a_n < b_n \leq b_k$ für alle $n \geq k$ und daraus folgt $a_k \leq x \leq b_k$, also $x \in I_k$. Damit gilt $x \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und folglich ist x ein Kern von $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(ii) Habe jede Intervallschachtelung in K einen Kern und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in K.

Definiere die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ rekursiv. Wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{2^2}$ für alle $n, m \geq n_1$ gilt und wähle $n_{k+1} \in \mathbb{N}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ derart, dass $n_{k+1} > n_k$ und $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{2^{k+2}}$ für alle $n, m \geq n_{k+1}$ gilt.

Behauptung: Die Folge $(I_k)_{k\in\mathbb{N}} := ([x_{n_k} - \frac{1}{2^k}, x_{n_k} + \frac{1}{2^k}])_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Intervallschachtelung: Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\left|\left(x_{n_{k+1}} \pm \frac{1}{2^{k+1}}\right) - x_{n_k}\right| \leq |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| + \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^k},$$

also $x_{n_{k+1}} \pm \frac{1}{2^{k+1}} \in I_k$ bzw. $I_{k+1} \subseteq I_k$. Zudem gilt

$$\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k} + \frac{1}{2^k} - \left(x_{n_k} - \frac{1}{2^k}\right)\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = 0.$$

Also ist $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung, die nach Voraussetzung einen Kern $x \in K$ besitzt.

Behauptung: Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen x: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x_m| \leq \varepsilon/2$ für alle $n, m \geq N$. Wähle zudem $k \in \mathbb{N}$, so dass $n_k \geq N$ und $\frac{1}{2^k} < \varepsilon/2$. Aus $x \in I_k$ folgt $|x - x_{n_k}| \leq \frac{1}{2^k} < \varepsilon/2$ und damit gilt für alle $n \geq N$

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

und folglich konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.