Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2014/15
27.11.2014
Blatt 7

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 4: Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt streng monoton steigend (bzw. streng monoton fallend), falls $a_{n+1} > a_n$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Betrachte die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1+\frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1+\frac{1}{n})^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist. (*Hinweis:* Zeigen Sie mit der Bernoullischen Ungleichung, dass stets $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ gilt.)

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} \\
&= \left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

(strikte Version der Bernoulli-Ungleichung)

$$\begin{aligned}
&> \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

oder alternativ mit der nicht-strikten Version

$$
\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&\geq \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{(n+1)^2 - n}{(n+1)^2} \cdot \frac{n+2}{n+1} \\
&= \frac{(n^2+2n+1)(n+2) - n(n+2)}{(n+1)^3} \\
&= \frac{n^3 + 2n^2 + 2n^2 + 4n + n + 2 - n^2 - 2n}{(n+1)^3} \\
&= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 1}{(n+1)^3} \\
&= \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} \\
&> 1.
\end{aligned}
$$

Damit ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend.

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} \\
&= \left(\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}\right)^{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

(strikte Version der Bernoulli-Ungleichung)

$$
\begin{aligned}
&> \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

bzw. wieder ohne die strikte Version

$$\begin{aligned}
\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}\\
&\geq \left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2}\\
&= \frac{(n(n+2)+n+1)(n+1)}{n(n+2)^2}\\
&= \frac{n(n+2)^2+1}{n(n+2)^2}\\
&> 1.
\end{aligned}$$

Also ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend.

(b) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und außerdem denselben Grenzwert haben.

Beweis: Für alle $n\in\mathbb{N}$ folgt aus $(1+\frac{1}{n})>1$ und Teil (a), dass $x_1\leq x_n\leq y_n\leq y_1$ gilt. Somit sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und beschränkt, also konvergent gemäß dem Satz aus der Vorlesung über monotone und beschränkte Folgen. Zudem gilt

$$0\leq y_n-x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)\leq\frac{y_1}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

und daraus folgt $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n$.

(c) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $e:=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ konvergiert. (*Hinweis:* Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz und zeigen Sie, dass für alle $m\in\mathbb{N}$ und alle $n\geq m$

$$x_n\geq\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(1-\frac{j}{n})\right)$$

gilt.)

Beweis: Sei $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\cdot\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\underbrace{\frac{n-j}{n}}_{\leq 1}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

und damit folgt $\lim_{n\to\infty}x_n\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=e$.

Sei $m\in\mathbb{N}$ und $n\geq m$. Dann gilt

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n}\geq\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\frac{n-j}{n}=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\prod_{j=0}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)$$

und folglich

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}.$$

Damit folgt wiederum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} = e$$

und insgesamt $\lim_{n\to\infty} x_n = e$.