Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
11.12.2014
Blatt 9

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \le f \le \psi$ und

$$\int_a^b (\psi - \varphi) \mathrm{d}x < \varepsilon$$

gibt.

Lösung:

(i) Sei f integrierbar und $\varepsilon > 0$. Dann existieren Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \le f \le \psi$,

$$\int f \, \mathrm{d}x - \varepsilon/2 < \int \varphi \, \mathrm{d}x \text{ und } \int f \, \mathrm{d}x + \varepsilon/2 > \int \psi \, \mathrm{d}x.$$

Daraus folgt $\int (\psi - \varphi) \, \mathrm{d}x = \int \psi \, \mathrm{d}x - \int \varphi \, \mathrm{d}x < \varepsilon$.

(ii) Es existiere für alle $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \le f \le \psi$ und $\int_a^b (\psi - \varphi) \mathrm{d}x < \varepsilon$. Sei $\varepsilon > 0$ und seien φ, ψ entsprechende Treppenfunktionen. Dann gilt

$$0 \le \int^* f \, \mathrm{d}x - \int_* f \, \mathrm{d}x \le \int \psi \, \mathrm{d}x - \int \varphi \, \mathrm{d}x = \int (\psi - \varphi) \, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt damit $\int^* f \, \mathrm{d}x = \int_* f \, \mathrm{d}x$ und daher ist f integrierbar.

Aufgabe 2: Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und definiere den Positivanteil f_+ von f durch

$$f_+ : [a, b] \to [0, \infty) : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \ge 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Ist f integrierbar, so ist auch f_+ integrierbar.

Lösung:

(i) Sei $\varepsilon > 0$ und wähle Treppenfunktionen ψ, φ mit $\varphi \le f \le \psi$ und $\int (\psi - \varphi) \mathrm{d}x < \varepsilon$.

(ii) **Behauptung:** Es gilt $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ und $\psi_+ - \varphi_+ \leq \psi - \varphi$.

Beweis: Sei $x \in [a, b]$.

1. Fall: $f(x) \geq 0$.
Fall 1a): $\varphi(x) \geq 0$. Dann gilt

$$0 \leq \varphi_+(x) = \varphi(x) \leq f(x) = f_+(x) \leq \psi(x) = \psi_+(x)$$

und

$$\psi_+(x) - \varphi_+(x) = \psi(x) - \varphi(x).$$

Fall 1b): $\varphi(x) < 0$. Dann gilt

$$0 = \varphi_+(x) \leq f(x) = f_+(x) \leq \psi(x) = \psi_+(x)$$

und

$$\psi_+(x) - \varphi_+(x) = \psi(x) \leq \psi(x) - \varphi(x).$$

2. Fall $f(x) < 0$. Dann gilt

$$\varphi_+(x) = f_+(x) = 0 \leq \psi_+(x).$$

Fall 2a): $\psi(x) \geq 0$. Dann gilt

$$\psi_+(x) - \varphi_+(x) = \psi(x) \leq \psi(x) - \varphi(x).$$

Fall 2b): $\psi(x) < 0$. Dann gilt

$$\psi_+(x) = 0 \leq \psi(x) - \varphi(x).$$

(iii) Es folgt also $\int(\psi_+ - \varphi_+)\mathrm{d}x \leq \int(\psi - \varphi)\mathrm{d}x < \varepsilon$ und damit ist f_+ nach Aufgabe 1 integrierbar.

Aufgabe 3: Definiere die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist, und berechnen Sie $\int_0^1 f \, \mathrm{d}x$.

Lösung:

(i) Definiere für eine Teilmenge $A \subseteq [0, 1]$ die Funktion $\mathbb{1}_A$ durch

$$\mathbb{1}_A : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist A ein abgeschlossenes Intervall oder endlich, so ist $\mathbb{1}_A$ eine Treppenfunktion.

(ii) Es gilt $\mathbb{1}_\emptyset \leq f$ und damit folgt $\int_* f \, \mathrm{d}x \geq \int \mathbb{1}_\emptyset \, \mathrm{d}x = 0$.

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und definiere die Treppenfunktion

$$\psi_n := \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{\frac{1}{k}\}}.$$

Dann gilt $f \leq \psi_n$ und $\int \psi_n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}$, woraus $\int^* f \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$ folgt.

(iv) Insgesamt gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \int_* f \, \mathrm{d}x \leq \int^* f \, \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}$$

und damit folgt $0 = \int_* f \, \mathrm{d}x = \int^* f \, \mathrm{d}x$. Also ist f intergrierbar und es gilt $\int f \, \mathrm{d}x = 0$.

Aufgabe 4: Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stetige Fortsetzung von f auf $[a, b]$, falls g stetig ist und $g|_{(a,b)} = f$ gilt.

Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn eine stetige Fortsetzung von f auf $[a, b]$ existiert.

Lösung:

(a) Existiert eine stetige Fortsetzung g von f auf $[a, b]$, so ist g gleichmäßig stetig und folglich ist auch $f = g|_{(a,b)}$ gleichmäßig stetig.

(b) Sei f gleichmäßig stetig.

  (i) **Behauptung:** Die Folge $(f(a+1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge. (Hier wurde $b-a \geq 1$ vorausgesetzt, sonst wäre die Folge nicht wohldefiniert. Ansonsten müsste man die Folge ab dem Index $k \in \mathbb{N}$ starten lassen, für welchen $a + 1/k \leq b$ gilt.)

  Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$, so dass $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in (a, b)$ mit $|x - y| < \delta$ gilt. Weiter existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

  $$|a + 1/n - (a + 1/m)| < \delta$$

  für alle $n, m \geq N$. Zusammen folgt daraus

  $$|f(a + 1/n) - f(a + 1/m)| < \varepsilon$$

  für alle $n, m \geq N$, d.h. die Folge ist eine Cauchy-Folge und ist insbesondere konvergent.

  (ii) Analog ist auch $(f(b - 1/n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

  (iii) Definiere die Fortsetzung $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ von f durch $g(a) := \lim_{n\to\infty} f(a + 1/n)$ und $g(b) := \lim_{n\to\infty} f(a + 1/n)$.

(iv) **Behauptung:** Die Funktion g ist stetig in a (und analog auch in b).

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$ für alle $x, y \in (a, b)$ mit $|x - y| < \delta$.

Sei nun $x \in (a - b)$ mit $|x - a| < \delta$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|g(a) - f(a + 1/N)| < \varepsilon/2$$

und $a + 1/N < x$. Damit gilt $|x - (a + 1/N)| \leq |x - a| < \delta$ und daher folgt

$$|g(a) - g(x)| \leq |g(a) - f(a + 1/N)| + |f(a + 1/N) - f(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Also gilt $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$, d.h. g ist stetig in a.

(v) Da f stetig ist, ist auch die Fortsetzung g auf dem offenen Intervall (a, b) und damit auf ganz $[a, b]$ stetig.

Aufgabe 5: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Definiere den Stetigkeitsmodul ω_f von f durch

$$\omega_f : [0, \infty) \to \mathbb{R} : \delta \mapsto \sup\{|f(x) - f(x')| : x, x' \in I \text{ mit } |x - x'| \leq \delta\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\omega_f(\delta') \leq \omega_f(\delta)$ für alle $0 \leq \delta' \leq \delta$ gilt.

Lösung: Seien $\delta', \delta \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq \delta' \leq \delta$. Dann gilt

$$\{|f(x) - f(x)| : x, x' \in I \text{ mit } |x - x'| \leq \delta'\} \subseteq \{|f(x) - f(x)| : x, x' \in I \text{ mit } |x - x'| \leq \delta\}$$

und daraus folgt $\omega_f(\delta') \leq \omega_f(\delta)$, denn für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\sup A \leq \sup B$.

(b) Zeigen Sie, dass $\omega_f(\delta' + \delta) \leq \omega_f(\delta') + \omega_f(\delta)$ für alle $\delta', \delta \geq 0$ gilt.

Lösung: Seien $\delta', \delta \geq 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren $x, x' \in I$ mit $|x - x'| \leq \delta' + \delta$ und $\omega_f(\delta' + \delta) - \varepsilon < |f(x) - f(x')|$. Aus $|x - x'| < \delta + \delta'$ folgt $\emptyset \neq (x - \delta, x + \delta) \cap (x' - \delta', x' + \delta')$, denn für offene Intervalle $(a, b), (c, d) \subseteq \mathbb{R}$ mit $(a, b) \cap (c, d) = \emptyset$ gilt $b \leq c$ oder $d \leq a$, was in diesem Fall jeweils zum Widerspruch $|x - x'| \geq \delta' + \delta$ führt. Also existiert ein $y \in I$ mit $|x - y| < \delta$ und $|x' - y| < \delta'$, und es folgt

$$\omega_f(\delta' + \delta) - \varepsilon < |f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(x')| \leq \omega_f(\delta) + \omega_f(\delta').$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt somit $\omega_f(\delta' + \delta) \leq \omega_f(\delta') + \omega_f(\delta)$.

(c) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Funktion f ist gleichmäßig stetig.

(ii) Es gilt $\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

(iii) Die Funktion ω_f ist gleichmäßig stetig.

Lösung:
„(i)⇒(ii)“: Sei f gleichmäßig stetig und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta' > 0$, so dass $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$ für alle $x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta'$. Setze $\delta := \delta'/2$ und sei $0 \leq \delta'' \leq \delta$. Für $x, x' \in I$ mit $|x - x'| \leq \delta''$ gilt $|x - x'| \leq \delta'' \leq \delta < \delta'$ und somit $|f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$. Daraus folgt $0 \leq \omega_f(\delta'') \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ und insgesamt $\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

„(ii)⇒(i)“: Gelte $\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $\omega_f(\delta) < \varepsilon$. Für $x, x' \in I$ mit $|x - x'| < \delta$ gilt somit $|f(x) - f(x')| \leq \omega_f(\delta) < \varepsilon$ und folglich ist f gleichmäßig stetig.

„(ii)⇒(iii)“: Gelte $\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = 0$, sei $\varepsilon > 0$ und wähle $\delta > 0$ derart, dass $\omega_f(\delta) < \varepsilon$. Seien $x, y \in [0, \infty)$ mit $|x - y| < \delta$, wobei man oBdA $x \geq y$, also $0 \leq x - y < \delta$, annehmen kann. Mit (a) und (b) folgt damit

$$\begin{aligned} |\omega_f(x) - \omega_f(y)| = \omega_f(x) - \omega_f(y) &= \omega_f(y + (x - y)) - \omega_f(y) \\ &\leq \omega_f(y) + \omega_f(x - y) - \omega_f(y) \\ &\leq \omega_f(\delta) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist ω_f gleichmäßig stetig.

„(iii)⇒(ii)“: Ist ω_f gleichmäßig stetig, so ist ω_f insbesondere in 0 stetig und damit gilt $\lim_{\delta\to 0} \omega_f(\delta) = \omega_f(0) = 0$.