Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
18.12.2014
Blatt 10

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 4: (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $b > 1$ und $f : [1, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$.

(a) Für jedes $r \in \mathbb{N}$ sei $q_r := \sqrt[r]{b}$ und $Z^{(r)} = (x_0^{(r)}, \ldots, x_r^{(r)})$ die Unterteilung von $[1, b]$ mit $x_k^{(r)} := q_r^k$ für $0 \leq k \leq r$. Weiter seien $\xi^{(r)} = (\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_r^{(r)})$ die Stützstellen mit $\xi_k^{(r)} := x_{k-1}^{(r)}$ für $1 \leq k \leq r$. Zeigen Sie, dass für die Riemannsche Summe $S_r := S(f, Z^{(r)}, \xi^{(r)})$ von f

$$S_r = \frac{b^{n+1} - 1}{\sum_{k=0}^{n} q_r^k}$$

gilt. (*Hinweis:* Verwenden Sie die geometrische Summenformel.)

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
S_r &= \sum_{k=1}^{r} f(\xi_k^{(r)}) \cdot (x_k^{(r)} - x_{k-1}^{(r)}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} (q_r^{k-1})^n \cdot (q_r^k - q_r^{k-1}) \\
&= (q_r - 1) \cdot \sum_{k=1}^{r} (q_r^{n+1})^{k-1} \\
&= (q_r - 1) \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (q_r^{n+1})^{k} \\
&= (q_r - 1) \cdot \frac{(q_r^{n+1})^r - 1}{q_r^{n+1} - 1} \\
&= \frac{b^{n+1} - 1}{\frac{q_r^{n+1} - 1}{q_r - 1}} \\
&= \frac{b^{n+1} - 1}{\sum_{k=0}^{n} q_r^k}.
\end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_1^b x^n \mathrm{d}x = \frac{b^{n+1} - 1}{n + 1}$$

gilt.

Lösung: Sei $a > 0$.

Behauptung: Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Beweis: Sei zunächst $a \geq 1$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a < n_0\varepsilon$. Für $n \geq n_0$ gilt somit $a < n_0\varepsilon \leq n\varepsilon \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\varepsilon^k = (\varepsilon+1)^n$ und damit $0 \leq \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$. Für $a < 1$ gilt dann $1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$.

Sei $\delta_r := \max\{|x_k^{(r)} - x_{k-1}^{(r)}| : 1 \leq k \leq r\}$ die Feinheit der Zerlegung $Z^{(r)}$ und $1 \leq k \leq r$. Dann gilt $|x_k^{(r)} - x_{k-1}^{(r)}| = q_r^{k-1} \cdot (q_r - 1) \leq b \cdot (q_r - 1)$ und damit folgt $0 \leq \delta_r \leq b \cdot (q_r - 1)$ bzw. $\lim_{r\to\infty} \delta_r = 0$. Nach dem Satz aus der Vorlesung über Riemannsche Summen folgt damit

$$\int_1^b x^n \mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} S_r = \lim_{r\to\infty} \frac{b^{n+1}-1}{\sum_{k=0}^{n} q_r^k} = \frac{b^{n+1}-1}{\sum_{k=0}^{n}(\lim_{r\to\infty}\sqrt[r]{b})^k} = = \frac{b^{n+1}-1}{n+1}.$$

Aufgabe 5: (4 Punkte) Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^a \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}$$

gilt. (*Hinweis:* Berechnen Sie jeweils für $b > 1$ und $b < 1$ das Intergral $\int_1^b \sqrt{x}\ \mathrm{d}x$ mit der Methode aus Aufgabe 4, um dann $\int_{1/n}^a \sqrt{x}\ \mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.)

Lösung:

(i) Sei $b > 1$, $f : [1, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ und verwende die Bezeichnungen aus Aufgabe 4. Dann gilt

$$\begin{aligned}
S_r &= \sum_{k=1}^{r} f(\xi_k^{(r)}) \cdot (x_k^{(r)} - x_{k-1}^{(r)}) \\
&= \sum_{k=1}^{r} (\sqrt{q_r})^{k-1} \cdot (q_r^k - q_r^{k-1}) \\
&= (q_r - 1) \cdot \sum_{k=1}^{r} (\sqrt{q_r^3})^{k-1} \\
&= (q_r - 1) \cdot \sum_{k=0}^{r-1} (\sqrt{q_r^3})^{k} \\
&= (\sqrt{q_r} + 1) \cdot (\sqrt{q_r} - 1) \cdot \frac{(\sqrt{q_r^3})^r - 1}{\sqrt{q_r^3} - 1} \\
&= (\sqrt{q_r} + 1) \cdot \frac{\sqrt{b^3} - 1}{\frac{\sqrt{q_r}^3 - 1}{\sqrt{q_r} - 1}} \\
&= (\sqrt{q_r} + 1) \cdot \frac{\sqrt{b^3} - 1}{\sum_{k=0}^{2} \sqrt{q_r}^k}.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}\int_1^b \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} S_r &= \lim_{r\to\infty}\left((\sqrt{q_r}+1)\cdot\frac{\sqrt{b^3}-1}{\sum_{k=0}^2 \sqrt{q_r}^k}\right)\\ &= \left(\sqrt{\lim_{r\to\infty} q_r}+1\right)\cdot\frac{\sqrt{b^3}-1}{\sum_{k=0}^2 \sqrt{\lim_{r\to\infty} q_r}^k}\\ &= \frac{2}{3}\cdot(\sqrt{b^3}-1).\end{aligned}$$

(ii) Sei $0 < b < 1$, $f : [b,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ und $r \in \mathbb{N}$. Definiere die Unterteilung $\widetilde{Z}^{(r)} = (y_0^{(r)}, \ldots, y_r^{(r)})$ von $[b,1]$ durch $y_k^{(r)} := q_r^{r-k}$ für $0 \leq k \leq r$ und seien $\zeta^{(r)} = (\zeta_1^{(r)}, \ldots, \zeta_r^{(r)})$ die Stützstellen mit $\zeta_k^{(r)} := y_k^{(r)}$ für $1 \leq k \leq r$. Für $\widetilde{S}_r := S(f, \widetilde{Z}^{(r)}, \zeta^{(r)})$ gilt dann

$$\begin{aligned}\widetilde{S}_r &= \sum_{k=1}^r f(\zeta_k^{(r)})\cdot(y_k^{(r)} - y_{k-1}^{(r)})\\ &= \sum_{k=1}^r (\sqrt{q_r})^{r-k}\cdot(q_r^{r-k} - q_r^{r-k+1})\\ &= (1-q_r)\cdot\sum_{k=1}^r (\sqrt{q_r^3})^{r-k}\\ &= (1-q_r)\cdot\sum_{k=0}^{r-1} (\sqrt{q_r^3})^{k}\\ &= (\sqrt{q_r}+1)\cdot\frac{1-\sqrt{b^3}}{\sum_{k=0}^2 \sqrt{q_r}^k}.\end{aligned}$$

Sei $\widetilde{\delta}_r := \max\{|y_k^{(r)} - y_{k-1}^{(r)}| : 1 \leq k \leq r\}$ die Feinheit der Zerlegung $\widetilde{Z}^{(r)}$ und $1 \leq k \leq r$. Dann gilt $|y_k^{(r)} - y_{k-1}^{(r)}| = q_r^{r-k}\cdot(1-q_r) \leq 1 - q_r$ und damit folgt $0 \leq \widetilde{\delta}_r \leq 1 - q_r$ bzw. $\lim_{r\to\infty}\widetilde{\delta}_r = 0$. Damit folgt analog zu (i) $\int_b^1 \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1-\sqrt{b^3})$ bzw. $\int_1^b \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}(\sqrt{b^3}-1)$.

(iii) Für $c, d > 0$ folgt mit Aufgabe 3

$$\int_c^d \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^d \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \int_1^c \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(\sqrt{d^3} - \sqrt{c^3}).$$

(iv) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $0 \leq \int_0^{1/n} \sqrt{x}\ \mathrm{d}x \leq \int_0^{1/n} 1\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n}$ und somit folgt

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1/n} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

(v) Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^a \sqrt{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^{1/n} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/n}^a \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{1/n} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^a \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}(\sqrt{a^3} - \sqrt{(1/n)^3})\\
&= \frac{2}{3}\sqrt{a^3}.
\end{aligned}$$