Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
28.01.2015
Probeklausur

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1: Bestimmen Sie, ob folgende Reihen konvergieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{k}} - 1 \right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{1/k}-1\right)^k.$$

Lösung:

(i) Setze $a_k = \frac{2^k k!}{k^k}$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{2^{k+1}(k+1)!k^k}{2^k k!(k+1)^{(k+1)}} = 2 \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 2 \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{e} < 1,$$

denn

$$\lim_{k\to\infty} \left(2 \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} \right) = 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} = 2 \cdot \left(\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \right)^{-1} = 2 \cdot e^{-1}$$

auf Grund der Stetigkeit von $x \mapsto x^{-1}$. Damit existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} - \frac{2}{e} \leq \left| \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} - \frac{2}{e} \right| \leq \frac{1-\frac{2}{e}}{2} > 0$$

bzw.

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq \frac{1+\frac{2}{e}}{2} < 1$$

für alle $k \geq k_0$ gilt, und folglich konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ nach dem Quotientenkriterium (Blatt 7 Aufgabe 1 (b)).

(ii) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\frac{1}{k}} - 1 &= \frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{k}}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1} \\
&= \frac{1+\frac{1}{k}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{k}}+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k^2+k}+k} \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{k^2+k^2}+k} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2}+1)k}.
\end{aligned}$$

Da die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}+1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergieren, divergiert somit auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{k}} - 1 \right)$.

(iii) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[k]{(2^{1/k}-1)^k} = 2^{1/k} - 1 = e^{\ln(2)/k} - 1.$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt zudem

$$\lim_{k\to\infty} e^{\ln(2)/k} - 1 = e^{\lim_{k\to\infty} \ln(2)/k} - 1 = e^0 - 1 = 0.$$

Damit existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[k]{(2^{1/k}-1)^k} \leq \frac{1}{2}$ für alle $k \geq k_0$ und folglich konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{1/k}-1\right)^k$ nach dem Wurzelkriterium (Blatt 7 Aufgabe 1 (a)).

Aufgabe 2: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sei rekursiv durch $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \ln(1+a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung:

(i) Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+a_n) = \ln(1 + \lim_{n\to\infty} a_n) = \ln(1+a)$$

bzw. $e^a = 1 + a$.

Für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x - x - 1$ gilt $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x - 1$. Da die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, gilt $e^x > 1$ für alle $x > 0$ und $e^x < 1$ für alle $x < 0$, woraus folgt, dass f auf dem Intervall $(0, \infty)$ streng monoton steigend und auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend ist. Also ist $0 = f(0)$ das globale Minimum von f, welches nur an der Stelle 0 angenommen wird. Wegen $f(a) = 0$ muss somit $a = 0$ gelten.

(ii) Zeige per Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung $0 < a_n \leq 1$ gilt, wobei der Induktionsanfang wegen $a_0 = 1$ offensichtlich ist.

Sei also $n \in \mathbb{N}_0$ und gelte $0 < a_n \leq 1$. Dann gilt $1 < 1 + a_n \leq 2$ und somit

$$0 = \ln(1) < \ln(1+a_n) = a_{n+1} \leq \ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}\, \mathrm{d}t \leq \int_1^2 1\, \mathrm{d}t = 1,$$

da ln streng monoton steigend und $x \mapsto x^{-1}$ streng monoton fallend ist.

Insbesondere ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also beschänkt.

(iii) Zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Dabei genügt es nach (ii) zu zeigen, dass $\ln(x+1) \leq x$ für alle $x \in (0,1]$ gilt. Sei also $x \in (0,1]$.

Nach (i) gilt $0 < e^x - x - 1$ bzw. $x + 1 \leq e^x$, und da ln monoton steigend ist, folgt $\ln(x+1) \leq x$.

(iv) Da jede monotone und beschränkte Folge konvergiert, folgt also aus (i) und (ii) die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach (i) muss $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dabei gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2}{1+(2x)^2}$:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x^2}{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Substitution mit $\varphi(t) = t/2$

$$\begin{aligned}
&= \int_{2a}^{2b} \frac{1}{8} \cdot \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8} \int_{2a}^{2b} \cdot \frac{1+t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8} \left[t - \arctan(t)\right]_{2a}^{2b} \\
&= \frac{1}{8} \left[2x - \arctan(2x)\right]_a^b .
\end{aligned}$$

Also ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{8}\left(2x - \arctan(2x)\right)$ eine Stammfunktion von f.

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x \cdot \arctan(x)$:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2x \cdot \arctan(x)\,\mathrm{d}x$$

partielle Integration

$$\begin{aligned}
&= \left[(1+x^2) \cdot \arctan(x)\right]_a^b - \int_a^b (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[(1+x^2) \cdot \arctan(x) - x\right]_a^b.
\end{aligned}$$

Also ist $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (1+x^2) \cdot \arctan(x) - x$ eine Stammfunktion von g.

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

Substitution mit $\varphi(t) = \ln(t)$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{e^a}^{e^b} \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{e^a}^{e^b} \frac{1}{t^2 + 1} \,\mathrm{d}t \\
&= [\arctan(t)]_{e^a}^{e^b} \\
&= [\arctan(e^x)]_a^b.
\end{aligned}
$$

Also ist $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \arctan(e^x)$ eine Stammfunktion von h.

Aufgabe 4:

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.

Lösung: Die Funktion $|f'| : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto |f'(x)|$ ist stetig und nimmt damit ein globales Maximum auf $[a, b]$ an. Definiere $L := \max\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$.
Seien also $x, y \in [a, b]$. Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(x) - f(y) = f'(\xi) \cdot (x - y)$$

und damit folgt

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)| \cdot |x - y| \leq L \cdot |x - y|.$$

Also ist f Lipschitz-stetig.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Lösung: Angenommen g ist Lipschitz-stetig. Dann existiert ein $L \in \mathbb{R}$, so dass

$$|g(x) - g(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt. Insbesondere gilt damit

$$\sqrt{x} \leq L \cdot x$$

und folglich

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leq L$$

für alle $x > 0$. Insbesondere gilt $0 < \frac{1}{\sqrt{1}} \leq L$ und für $x_0 := \frac{1}{4L^2} > 0$ gilt damit

$$2L = \frac{1}{x_0} \leq L,$$

woraus der Widerspruch $L \leq 0$ folgt. Also kann g nicht Lipschitz-stetig sein.

Aufgabe 5: Definiere die Funktion f durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \ln(|x|) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

Lösung:

(i) Die Funktion f lässt sich auch durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \ln(-x) & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ x^2 \cdot \ln(x) & \text{falls } x > 0 \end{cases}$$

beschreiben. Damit sind $f|_{(-\infty,0)}$ und $f|_{(0,\infty)}$ als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen wieder stetig differenzierbar. Für $x < 0$ gilt dabei mit Ketten- und Produktregel

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(-x) + x^2 \cdot \frac{1}{-x} \cdot (-1) = 2x \cdot \ln(-x) + x$$

bzw. für $x > 0$

$$f'(x) = 2x \cdot \ln(x) + x.$$

(ii) Zeige $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln(|x|) = 0$: Es gilt $\lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ und $\lim_{x\searrow 0} \ln(x) = -\infty$ und mit der Regel von l'Hospital folgt somit

$$\lim_{x\searrow 0} x \cdot \ln(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\searrow 0} -x = 0.$$

Analog gilt auch $\lim_{x\nearrow 0} x \cdot \ln(-x) = 0$ und damit gilt $\lim_{x\to 0} x \cdot \ln(|x|) = 0$.

(iii) Daraus folgt nun, dass f in 0 differenzierbar ist, denn es gilt

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \ln(|x|) = 0.$$

Damit ist f differenzierbar und es gilt

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 2x \cdot \ln(|x|) + x & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iv) Da f' auf den offenen Intervallen $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig ist, bleibt nur zu zeigen, dass f' auch in 0 stetig ist. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} (2x \cdot \ln(|x|) + x) = 2 \cdot \lim_{x\to 0} (x \cdot \ln(|x|)) + \lim_{x\to 0} x = 0 = f'(0)$$

und damit ist f' auch in 0 stetig. Also ist f stetig differenzierbar.