Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2014/15
30.10.2014
Blatt 3

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1:

a) Für jedes $j \in \{1, 2\}$ sei jeweils M_j eine Menge, $\pi_j : M_1 \times M_2 \to M_j$ die kanonische Projektion und $f_j : N \to M_j$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $f : N \to M_1 \times M_2$ gibt, so dass $\pi_1 \circ f = f_1$ und $\pi_2 \circ f = f_2$ gilt.

b) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M, $Q := M/\sim$ die Quotientenmenge, $\pi : M \to Q$ die kanonische Projektion und $f : M \to N$ eine Abbildung, so dass

$$\forall\, a, b \in M : a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

gilt. Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $g : Q \to N$ gibt, so dass $f = g \circ \pi$ gilt.

Aufgabe 2:

(a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

(i) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(ii) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(iii) $3 \mid n^3 - n$

gilt.

(b) Finden Sie den Fehler im Beweis des folgenden Satzes:

Satz: *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis: *Da es nur endlich viele Pferde gibt, genügt es zu zeigen, dass in jeder endlichen Ansammlung von Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben, was per vollständiger Induktion über die Anzahl der Pferde in der Ansammlung bewiesen wird.*
Induktionsanfang: Für $n = 1$ besteht die Ansammlung nur aus einem Pferd und damit haben alle Pferde in dieser Ansammlung dieselbe Farbe.
Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für n, d.h. in jeder Ansammlung von n Pferden haben alle Pferde dieselbe Farbe.
Induktionsschritt: Sei $\{P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}\}$ eine Ansammlung von $n + 1$ Pferden. Nach Induktionsvoraussetzung haben alle Pferde in $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ dieselbe Farbe, insbesondere haben P_1 und P_2 dieselbe Farbe. Nach Induktionsvoraussetzung haben aber auch alle Pferde in $\{P_2, \ldots, P_{n+1}\}$ dieselbe Farbe, also die Farbe von P_2 und damit die Farbe von P_1. Daraus folgt, dass alle Pferde in $\{P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}\}$ dieselbe Farbe haben.

Aufgabe 3: Sei $n \in \mathbb{N}$ und J ein n-stelliger Junktor. Zeigen Sie, dass man J durch eine Formel ausdücken kann, welche nur die Junktoren „$\neg$“ und „$\wedge$“ enthält. (*Hinweis:* Verwenden Sie vollständige Induktion und zeigen Sie, dass

$$J(A_1, A_2, \ldots, A_n) \leftrightarrow ((A_1 \wedge J(A_2 \vee \neg A_2, A_2, \ldots A_n)) \vee (\neg A_1 \wedge J(A_2 \wedge \neg A_2, A_2, \ldots A_n)))$$

eine Tautologie ist.)

Aufgabe 4: Hilberts Hotel besitzt abzählbar unendlich viele Zimmer, welche durch die natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$ nummeriert sind und die im Moment alle belegt sind. Kommt nun ein weiterer Gast, so kann dieser untergebracht werden, indem jeder bisherige Gast in das Zimmer mit der nächst höheren Nummer wechselt, d.h. der bisherige Gast aus Zimmer 1 zieht in Zimmer 2, der bisherige Gast aus Zimmer 2 zieht in Zimmer 3, usw. So hat jeder der alten Gäste weiterhin ein Zimmer und der neue Gast kann nun in das frei gewordene Zimmer 1 ziehen. Wie kann man alle Gäste unterbringen, wenn

(a) endlich viele neue Gäste kommen,

(b) ein Bus mit abzählbar unendlich vielen neuen Gästen kommt,

(c) endlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen neuen Gästen kommen,

(d) abzählbar unendlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen neuen Gästen kommen?

Abgabe: Am Donnerstag, dem 6. November 2014, in der Vorlesung.