Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
06.11.2014
Blatt 4

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1: Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und definiere für $x \in K$ die Potenzen von x rekursiv durch

$$x^0 := 1 \text{ und } x^{n+1} := x^n \cdot x \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und alle $x, y \in K$

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}, \quad (x^n)^m = x^{nm} \quad \text{und} \quad x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n$$

gilt. Definieren Sie zudem die Potenzen für negative ganzzahlige Exponenten und begründen Sie die Wahl Ihrer Definition.

Aufgabe 2: Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in K$

(a) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$,

(b) $-(-x) = x$,

(c) $x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ oder } y = 0)$,

(d) $x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x = y \text{ oder } x = -y)$

gilt.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist und beweisen Sie zudem, dass dieser nicht angeordnet werden kann.

Aufgabe 4: Sei (K, P) ein angeordneter Körper.

(a) Eine Relation R auf einer Menge M heißt antisymmetrisch, falls

$$\forall\, a, b \in M : (aRb \text{ und } bRa) \Rightarrow a = b$$

gilt.

Zeigen Sie, dass die Relation $\geq$ auf K antisymmetrisch und transitiv ist.

(b) Zeigen Sie, dass

(i) $\forall\, x, y \in K : x > y \Rightarrow -y > -x$,

(ii) $\forall\, x \in P : \forall\, y \in (-P) : x \cdot y \in (-P)$,

(iii) $\forall\, x, y \in P : x > y \Rightarrow y^{-1} > x^{-1}$

gilt.

Abgabe: Am Donnerstag, dem 13. November 2014, in der Vorlesung.