Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
13.11.2014
Blatt 5

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1:

(a) Zeigen Sie, dass die Folgen $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(n^3 - n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergieren.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge mit

(i) $a_n = \frac{1}{2^n}$

(ii) $a_n = \frac{2n^2-n}{n^2+1}$.

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils gegen eine reelle Zahl a konvergiert und geben Sie jeweils für $\varepsilon = 10^{-3}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: Konvergiert eine Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ und gegen $b \in \mathbb{R}$, so gilt $a = b$.

Aufgabe 3: Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit

$$a := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n$$

und $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Aufgabe 4: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei rekursiv durch $a_1 := 2$ und $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert. Zeigen Sie:

(a) Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so gilt $(\lim_{n\to\infty} a_n)^2 = 2$.

(b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt und monoton fallend, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_{n+1} \leq a_n$.

Abgabe: Am Donnerstag, dem 20. November 2014, in der Vorlesung.