Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
20.11.2014
Blatt 6

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1:

(a) Stellen Sie die Dezimalzahlen 13 und 24 im 7-er-System dar und addieren und multiplizieren Sie sie schriftlich.

(b) Stellen Sie $\frac{1}{7}$ als Dezimalbruch, als dyadischen Bruch und als 12-adischen Bruch dar. (*Hinweis:* Im 12-er-System müssen Sie natürlich für die Dezimalzahlen 10 und 11 zwei neue Ziffern verwenden.)

Aufgabe 2: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Reihe. Die Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt absolut konvergent, falls $(\sum_{k=1}^n |a_k|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass jede absolut konvergente Reihe auch konvergent ist. (*Hinweis:* Verwenden Sie die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)

(b) Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $|x_n| \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Reihe $(\sum_{k=1}^n y_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe $(\sum_{k=1}^n x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 3:

(a) Bestimmen Sie den Wert folgender Reihen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}.$$

(*Hinweis:* Finden Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass stets $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ gilt, und stellen Sie die anderen Reihen in ähnlicher Weise dar.)

(b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

konvergiert. (*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass die Folgen $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind und dabei gegen denselben Grenzwert konvergieren.)

Aufgabe 4: Sei (K, P) ein archimedisch angeordneter Körper (man denke an $\mathbb{R}$) und $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in K, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren $a_n, b_n \in K$ mit $a_n < b_n$ und $[a_n, b_n] = I_n$. Man nennt die Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung in K, falls folgende Eigenschaften gelten:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_{n+1} \subseteq I_n$, also $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$,

(ii) $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Ein Element $x \in K$ heißt Kern von $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass in K genau dann jede Cauchy-Folge konvergiert, wenn jede Intervallschachtelung in K einen Kern besitzt.

(*Hinweis:* Betrachten Sie für eine Cauchy-Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Intervalle der Form $[x_{n_k} - \frac{1}{2^k}, x_{n_k} + \frac{1}{2^k}]$ mit einer geeigneten Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und betrachten Sie für die andere Richtung die Folge der Randpunkte $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)

Abgabe: Am Donnerstag, dem 27. November 2014, in der Vorlesung.