Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2014/15

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

27.11.2014
Blatt 7

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen.

(a) Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}$ die eindeutige nicht-negative Zahl mit $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Es existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine reelle Zahl $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ derart, dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert.

(b) Es existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und eine reelle Zahl $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$ derart, dass $a_n \neq 0$ und

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergiert.

(c) Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n)^{-n}.$$

Aufgabe 2: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $a \in I$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) Die Funktion f ist stetig in a.

(ii) Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in I mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Aufgabe 3:

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass $a \in \mathbb{R}$ genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ existiert.

(b) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen. Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl ein Häufungspunkt der Folge $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 4: Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt streng monoton steigend (bzw. streng monoton fallend), falls $a_{n+1} > a_n$ (bzw. $a_{n+1} < a_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Betrachte die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1 + \frac{1}{n})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((1 + \frac{1}{n})^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton steigend und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist. (*Hinweis:* Zeigen Sie mit der Bernoullischen Ungleichung, dass stets $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ gilt.)

(b) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren und außerdem denselben Grenzwert haben.

(c) Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergiert. (*Hinweis:* Verwenden Sie den binomischen Lehrsatz und zeigen Sie, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \geq m$

$$x_n \geq \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (1 - \frac{j}{n}) \right)$$

gilt.)

Abgabe: Am Donnerstag, dem 4. Dezember 2014, in der Vorlesung.