Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
04.12.2014
Blatt 8

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1: (2 Punkte) Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, d.h. es existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = \xi$. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion h mit $h(x) = f(x) - x$.)

Aufgabe 2: (2 Punkte) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Die Funktion f heißt gleichmäßig stetig, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \forall\, x, y \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

gilt.

(ii) Die Funktion f heißt Lipschitz-stetig, falls eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y|$$

für alle $x, y \in I$ gilt.

Zeigen Sie, dass jede Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 3: Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}$ nicht-leere und nach oben beschränkte Mengen.

(a) (2 Punkte) Sei $M \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von A. Zeigen Sie, dass $M = \sup A$ genau dann gilt, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ mit $M - \varepsilon < a$ existiert.

Formulieren Sie zudem eine entsprechende Aussage für das Infimum einer nicht-leeren und nach unten beschränkten Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup A$ existiert.

(c) (1 Punkt) Definiere die Menge $A + B \subseteq \mathbb{R}$ durch

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ gilt.

(d) (1 Punkt) Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ definiert man

$$\sup f := \sup\{f(x) : x \in X\}.$$

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass für zwei Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ die Gleichung $\sup(f + g) = \sup f + \sup g$ im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 4: (jeweils 2 Punkte)

(a) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Zeigen Sie die Stetigkeit von f in x_0, indem Sie ein $\delta > 0$ angeben, so dass

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 5: (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Stellen, an welchen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls teilerfremde } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } q \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{p}{q} \text{ existieren} \\ 1 & \text{falls } x = 0 \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

stetig ist. (*Hinweis:* Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{N}$ die Menge

$$(x - 1, x + 1) \cap \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N},\ q \leq m \right\}$$

endlich ist.)

Abgabe: Am Donnerstag, dem 11. Dezember 2014, in der Vorlesung.