Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
11.12.2014
Blatt 9

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1: (3 Punkte) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann integrierbar ist, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und

$$\int_a^b (\psi - \varphi)\, \mathrm{d}x < \varepsilon$$

gibt.

Aufgabe 2: (3 Punkte) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und definiere den Positivanteil f_+ von f durch

$$f_+ : [a, b] \to [0, \infty) : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Ist f integrierbar, so ist auch f_+ integrierbar. (*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 1.)

Aufgabe 3: (3 Punkte) Definiere die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x = \frac{1}{n} \text{ für ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist, und berechnen Sie $\int_0^1 f\, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 4: (3 Punkte) Sei $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stetige Fortsetzung von f auf $[a, b]$, falls g stetig ist und $g|_{(a,b)} = f$ gilt.

Zeigen Sie, dass f genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn eine stetige Fortestzung von f auf $[a, b]$ existiert.

Aufgabe 5: (4 Punkte) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Definiere den Stetigkeitsmodul ω_f von f durch

$$\omega_f : [0, \infty) \to \mathbb{R} : \delta \mapsto \sup\{|f(x) - f(x')| : x, x' \in I \text{ mit } |x - x'| \leq \delta\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\omega_f(\delta') \leq \omega_f(\delta)$ für alle $0 \leq \delta' \leq \delta$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $\omega_f(\delta' + \delta) \leq \omega_f(\delta') + \omega_f(\delta)$ für alle $\delta', \delta \geq 0$ gilt.

(c) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

   (i) Die Funktion f ist gleichmäßig stetig.

   (ii) Es gilt $\lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) = 0$.

   (iii) Die Funktion ω_f ist gleichmäßig stetig.

Abgabe: Am Donnerstag, dem 18. Dezember 2014, in der Vorlesung.