Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2014/15
18.12.2014
Blatt 10

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1: (2 Punkte) Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine stetige Funktion mit $\int_a^b f \, \mathrm{d}x = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f = 0$ gilt.

Aufgabe 2: (2 Punkte) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(0) = 1$, $f(x) = 0$, falls x irrational ist, und $f(x) = \frac{1}{q}$, falls $x = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ und der Ausdruck $\frac{p}{q}$ vollständig gekürzt ist.

Zeigen Sie, dass f integrierbar ist, und berechnen Sie $\int_0^1 f \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\xi \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass dann auch $f|_{[a,\xi]}$ und $f|_{[\xi,b]}$ integrierbar sind und dass

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + \int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

gilt. (*Hinweis:* Zeigen Sie die Aussage zunächst für Treppenfunktionen und verwenden Sie Aufgabe 1 von Blatt 9.)

Aufgabe 4: (4 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$, $b > 1$ und $f : [1, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$.

(a) Für jedes $r \in \mathbb{N}$ sei $q_r := \sqrt[r]{b}$ und $Z^{(r)} = (x_0^{(r)}, \ldots, x_r^{(r)})$ die Unterteilung von $[1, b]$ mit $x_k^{(r)} := q_r^k$ für $0 \le k \le r$. Weiter seien $\xi^{(r)} = (\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_r^{(r)})$ die Stützstellen mit $\xi_k^{(r)} := x_{k-1}^{(r)}$ für $1 \le k \le r$. Zeigen Sie, dass für die Riemannsche Summe $S_r := S(f, Z^{(r)}, \xi^{(r)})$ von f

$$S_r = \frac{b^{n+1} - 1}{\sum_{k=0}^n q_r^k}$$

gilt. (*Hinweis:* Verwenden Sie die geometrische Summenformel.)

(b) Zeigen Sie, dass

$$\int_1^b x^n \mathrm{d}x = \frac{b^{n+1} - 1}{n + 1}$$

gilt.

Aufgabe 5: (4 Punkte) Sei $a > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^a \sqrt{x} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{a^3}$$

gilt. (*Hinweis:* Berechnen Sie jeweils für $b > 1$ und $b < 1$ das Intergral $\int_1^b \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$ mit der Methode aus Aufgabe 4, um dann $\int_{1/n}^a \sqrt{x}\, \mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen.)

Abgabe: Am Donnerstag, dem 8. Januar 2015, in der Vorlesung.

Weihnachtsaufgabe*: Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ gibt, die jeden reellen Wert genau zweimal oder gar nicht annimmt.

Lösungen der Weihnachtsaufgabe können bis Donnerstag, den 8. Januar 2015, um 10:15 Uhr im Postfach von Pirmin Vollert in C3A16 abgegeben werden.

*: Die beste Lösung wird mit einem Buchpreis belohnt.