Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
15.01.2015
Blatt 12

# Übungen zu „Analysis I“

**Aufgabe 1:** (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

$$f : (0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{1-x^2} \quad \text{und} \quad g : (0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto (x+\ln(x))^7.$$

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion von

$$h : (1,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \quad \text{und} \quad k : \mathbb{R} \setminus \{1,-1\} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}.$$

**Aufgabe 2:** (2 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} x \cdot \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

**Aufgabe 3:** (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit konstanter Ableitung. Zeigen Sie, dass $f$ affin-linear ist.

**Aufgabe 4:** (4 Punkte) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) Besitzt $f$ in $a$ ein lokales Minimum, so gilt $f'(a) \geq 0$, und besitzt $f$ ein lokales Minimum in $b$, so gilt $f'(b) \leq 0$.

(b) Gilt $f'(a) < 0$ und $f'(b) > 0$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$. (*Hinweis:* Die Ableitung $f'$ muss nicht stetig sein.)

**Aufgabe 5:** (4 Punkte) Sei $a > 0$, $c \in \mathbb{R}$ und $f : (0,a) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0} f'(x) = c.$$

Zeigen Sie, dass dann $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = c$ gilt.

(*Hinweis:* Zeigen Sie die Aussage zunächst für den Fall $c = 0$ und betrachten Sie dann $g(x) := f(x) - cx$.)

**Abgabe:** Am Donnerstag, dem 22. Januar 2015, in der Vorlesung.