Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
22.01.2015
Blatt 13

Übungen zu „Analysis I"

Funktionalgleichung des Logarithmus: Für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ gilt $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

Aufgabe 1: Sei $r \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}^+$. Zeigen Sie die Gleichung

$$\ln(x^r) = r \cdot \ln(x)$$

auf folgende Arten:

(a) Verwenden Sie die Funktionalgleichung des Logarithmus, um die Formel zunächst für $r \in \mathbb{N}$, dann für $r \in \mathbb{Z}$ und zum Schluss für $r \in \mathbb{Q}$ zu zeigen.

(b) Zeigen Sie die Gleichung, indem Sie beide Seiten nach x differenzieren.

Exponentialfunktion: Die Umkehrfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ von $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ heißt Exponentialfunktion und für diese gilt $\exp' = \exp$. Für $x \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ definiert man $e^x := \exp(x)$ und $a^x := e^{x \cdot \ln(a)}$, wobei aus Aufgabe 1 folgt, dass dies für $x \in \mathbb{Q}$ mit der ursprünglichen Definition der Potenz übereinstimmt.

Aufgabe 2:

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^x \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^{(x^x)}.$$

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion von

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \cdot e^x \quad \text{und} \quad k : (0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x \cdot \ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aufgabe 3: (Regel von L'Hospital) Sei $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intevall, wobei die Fälle $b = \infty$ oder $a = -\infty$ zugelassen sind, und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = 0.$$

Zudem existiere der Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass dann $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ und $\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$ gilt.

(*Hinweis:* Zeigen Sie, dass g streng monoton ist und dass man den allgemeinen Fall darauf zurückführen kann, dass g streng monoton fallend ist. Wenden Sie dann von Blatt 12 Aufgabe 5 auf die Funktion $F := f \circ g^{-1}$ an.)

Bemerkung: Entsprechende Aussagen gelten auch, falls man $x \nearrow b$ durch $x \searrow a$ ersetzt, und für den Fall $\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty$.

Aufgabe 4: Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot e^{-x^2}, \quad \lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right), \quad \lim_{x\to\infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1} \right), \quad \lim_{x \searrow 0} x^x$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 3 inklusive der Bemerkung.)

Abgabe: Am Donnerstag, dem 29. Januar 2015, in der Vorlesung.