Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

WS 2014/15
29.01.2015
Blatt 14

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

Übungen zu „Analysis I"

Aufgabe 1: (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = f$. Zeigen Sie, dass dann ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) = ce^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto e^{-x} \cdot f(x)$.)

Aufgabe 2: Definiere die hyperbolischen Funktionen sinh und cosh durch

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \text{und} \quad \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right).$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$.

(b) (1 Punkt) Sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

(c) (2 Punkte) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie eine der folgenden Gleichungen:

$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),$$
$$\sinh(x+y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y).$$

(d) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh|_{(0,\infty)} : (0,\infty) \to (1,\infty)$ bijektiv sind und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh} := \sinh^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{arcosh} := (\cosh|_{(0,\infty)})^{-1} : (1,\infty) \to (0,\infty)$.

Aufgabe 3: (3 Punkte) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. (*Hinweis:* Substituieren Sie zuerst mit $\varphi(t) = \sinh(t)$ und wenden Sie dann partielle Integration an.)

Aufgabe 4: (3 Punkte) Sei $H := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1,\ x > 0\}$, $P = (a,b) \in H$ mit $b > 0$, $Q := (a,-b)$, $o := (0,0)$ und F der Flächeninhalt der Fläche, die von $\overline{oP}$, $\overline{oQ}$ und H eingeschlossen wird. Zeigen Sie, dass dann $a = \cosh(F)$ und $b = \sinh(F)$ gilt.

(*Hinweis:* Zeigen Sie $2 \cdot \int_1^a \sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}x = a \cdot \sinh(\operatorname{arcosh}(a)) - \operatorname{arcosh}(a)$, indem Sie substituieren und durch partielle Integration eine Stammfunktion von $\sinh^2$ bestimmen. Zeigen Sie dann $\sinh(\operatorname{arcosh}(a)) = b$ und drücken Sie F mit dem vorigen Integral aus.)

Abgabe: Am Donnerstag, dem 5. Februar 2015, in der Vorlesung.