Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
05.02.2015
Blatt 15

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1 (Punkte 3) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = 1 + f^2$. Zeigen Sie, dass dann ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in I$

$$f(x) = \tan(x + c)$$

gilt. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $x \mapsto \arctan(f(x))$.)

Aufgabe 2: (3 Punkte) Zeigen Sie

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Aufgabe 3: (3 Punkte) Seien $x, y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $x + y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Zeigen Sie, dass dann

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

gilt. (*Hinweis:* Differenzieren Sie die rechte Seite nach x und verwenden Sie Aufgabe 1.)

Aufgabe 4: (4 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\alpha : [1, e] \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^2, \ln(t) - \frac{1}{4}t^4)$.

(b) Berechnen Sie die Länge des Parabelbogens

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ y = x^2\}.$$

(*Hinweis:* Finden Sie zunächst eine Parametrisierung von B und verwenden Sie die Lösung von Blatt 14 Aufgabe 3 $x \mapsto \frac{1}{2}(x \cdot \sqrt{x^2+1} + \operatorname{arsinh}(x))$.)

Aufgabe 5: (3 Punkte) Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle, $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare Kurve und $\varphi : J \to I$ ein bijektive, stetig differenzierbare Abbildung mit $\varphi'(x) \neq 0$ für alle $x \in J$. Zeigen Sie, dass die Kurven α und $\beta := \alpha \circ \varphi : J \to \mathbb{R}^2$ dieselben Längen haben, d.h. es gilt

$$L[\alpha] = L[\beta].$$

Freiwillige Abgabe: Am Donnerstag, dem 12. Februar 2015, in der Vorlesung. Die erreichten Punkte dieses Übungsblatts werden angerechnet, ohne dass sich die für die Klausurzulassung benötigte Gesampunktzahl ändert.