Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
14.02.2015
Klausur

Klausur zu „Analysis I“

Aufgabe 1: Bestimmen Sie, ob folgende Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k(k+1)}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$

Aufgabe 2: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sei rekursiv durch $a_0 := 0$ und $a_{n+1} := 1 + \frac{a_n}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 \sin(x)$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$

(c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{2}$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 5: Definiere die Funktion f durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, berechnen Sie die Ableitung von f und zeigen Sie, dass diese nicht stetig ist.