Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
07.04.2015
Nachklausur

Nachklausur zu „Analysis I“

Aufgabe 1: Bestimmen Sie, ob folgende Reihen konvergieren:

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{3^k \cdot (k!)^2}$

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{(k+1)^2 \cdot k}$

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{k}\right)}$ (*Hinweis:* Verwenden Sie das Wurzelkriterium.)

Aufgabe 2: Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{a_n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

(*Hinweis:* Bestimmen Sie den Grenzwert unter der Annahme, dass die Folge konvergiert, und zeigen Sie, dass die Folge durch diesen nach oben beschränkt ist.)

Aufgabe 3: Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \sinh(x) \cdot \sin(x)$

(b) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln(x \cdot \exp(x))$

(c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(\sqrt{x})$

Aufgabe 4: Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \sin(1/x)$ nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 5: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine Funktion mit $f(1) = \exp(1)$. Zudem sei f im Punkt 0 stetig und es gelte

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

(a) Zeigen Sie $f(0) = 1$.

(b) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

(c) Zeigen Sie $f = \exp$. (*Hinweis:* Zeigen Sie zunächst, dass f und $\exp$ auf $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ übereinstimmen, und verwenden Sie dann Teil (b).)