Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Pirmin Vollert

WS 2014/15
28.01.2015
Probeklausur

Übungen zu „Analysis I“

Aufgabe 1: Bestimmen Sie, ob folgende Reihen konvergieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{k}} - 1 \right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{1/k} - 1\right)^k.$$

Aufgabe 2: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ sei rekursiv durch $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := \ln(1 + a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 3: Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der folgenden Funktionen:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2}{1+(2x)^2}$

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x \cdot \arctan(x)$

(c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{e^x+e^{-x}}$

Aufgabe 4:

(a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass f Lipschitz-stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$ nicht Lipschitz-stetig ist.

Aufgabe 5: Definiere die Funktion f durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cdot \ln(|x|) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.

Keine Abgabe.