1 Etwas Aussagenlogik

1.1 Unter einer *mathematischen Aussage* wollen wir eine Aussage verstehen, der man eindeutig einen Wahrheitsgehalt zuordnen kann. Sie ist entweder richtig (w) oder falsch (f). Mathematische Aussagen werden durch *aussagenlogische Verbindungen*, sogenannte *Junktoren*, miteinander verbunden. Unter den möglichen 4 ($= 2^2$) *einstelligen Junktoren* ist der sogenannte *non-Junktor* oder die *Negation*, mit Zeichen $\neg$, der wichtigste. Aus einer Aussage A (mit den möglichen Wahrheitswerten w und f) kann man die neue Aussage $\neg A$ bilden, deren Wahrheitswerte sich aus denen von A vermöge der folgenden *Wahrheitstafel* ergeben:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Die anderen drei einstelligen Junktoren sind durch die folgenden Wahrheitstafeln gegeben:

A	$*_1 A$
w	w
f	w

(Verum)

A	$*_2 A$
w	w
f	f

(Affirmation)

A	$*_3 A$
w	f
f	f

(Falsum)

1.2 Wichtiger sind die *2-stelligen Junktoren*, die ebenfalls durch ihre Wahrheitstafeln definiert sind. Sie ordnen zwei Aussagen A und B eine dritte zu, die wir vielleicht für den Augenblick mit $J(A, B)$ oder AJB bezeichnen wollen, wenn J den Junktor notiert. Die für uns wichtigsten (unter den 16 ($= 2^4$) möglichen) sind folgende:

(a) der „und"-Junktor $\wedge$:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

(Konjunktion)

Die neue Aussage „A und B" möge also dann und nur dann wahr sein, wenn A wahr ist und B wahr ist. Das stimmt mit dem umgangssprachlichen Gebrauch des Wörtchens „und" überein.

(b) der „oder"-Junktor $\vee$:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

(Disjunktion)

Die neue Aussage „A oder B“ möge also genau dann wahr sein, wenn mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist. Man beachte, dass dies mit dem umgangssprachlichen Gebrauch des Wörtchens „oder“ nicht unbedingt übereinstimmt, da man dort oft das ausschließende „oder“ meint, was wir später den Junktor „Entweder-oder“ bzw. *Kontravalenz* nennen werden.

(c) der „wenn-dann“-Junktor $\to$:

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

(Implikation)

Die neue Aussage „$A \to B$“ wird dabei etwa „aus A folgt B“ oder „A impliziert B“ gelesen. Man beachte auch hier den abweichenden Gebrauch von der Umgangssprache. Im Gegensatz zu dieser, wo der Gebrauch vielleicht auch nicht eindeutig geklärt ist, ist eine Aussage vom Typ „aus A folgt B“ immer richtig, wenn A falsch ist. Zum Beispiel ist die folgende Aussage mathematisch richtig:

„Wenn Fortuna Düsseldorf in der Saison 2013/14 deutscher Meister ist, ist 5 eine gerade Zahl“,

denn Fortuna Düsseldorf war in der vergangenen Saison nicht deutscher Meister. Viele mathematische Sätze sind von der Bauart „$A \to B$“.

(d) der Äquivalenzfunktor $\leftrightarrow$:

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

(Äquivalenz)

Die neue Aussage „$A \leftrightarrow B$“, die wir mit „A äquivalent B“ bezeichnen, ist also dann und nur dann richtig, wenn beide Aussagen den gleichen Wahrheitsgehalt haben. Anstatt von „A äquivalent B“ sagen wir auch „A genau dann wenn B“ oder „A wenn, und nur wenn B“ oder ähnliche Formulierungen.

1.3 Unter einer *aussagenlogischen Formel* wollen wir nun eine Aneinanderreihung von Aussagen vermöge von Junktoren verstehen, die somit eine neue Aussage bilden. Von besonderer Bedeutung sind dabei Formeln, die stets den Wahrheitsgehalt wahr (w) annehmen, wie immer man auch die Wahrheitswerte der *Eingangsaussagen* belegt. Wir nennen eine solche Formel eine *Tautologie*.

Die folgende Formel ist z.B. eine Tautologie:

$$(\neg(\neg A)) \leftrightarrow A. \qquad (*)$$

Wir benutzen hier zum ersten mal *Klammern*, um klarzumachen, welche Junktoren zuerst angewendet werden. Zum Beweis dafür, dass die obige Formel, die ausdrückt, dass die *doppelte Verneinung* mathematisch das Gleiche aussagt wie die Bejahung, stellen wir die Wahrheitstafel für diese Formel auf. Man beachte, dass auch die doppelte Verneinung umgangssprachlich durchaus auch anders verwandt wird, z.B. als eine verstärkende Verneinung wie im schwäbischen

„Da ist nirgends nichts gewesen außer hier."
(zum Mössinger Generalstreik am 30. Januar 1933)

Beweis von $(*)$:

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \leftrightarrow A$
w	f	w	w
f	w	f	w

Eine weitere Tautologie ist:

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A)),$$

gesprochen „A ist äquivalent zu B, genau dann und nur dann, wenn B aus A folgt und A aus B folgt".

Beweis:

A	B	$A \leftrightarrow B$	$A \to B$	$B \to A$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \wedge (B \to A))$
w
w
w
w

Das bedeutet, dass wir - hätten wir sparsam sein wollen - den Junktor „$\leftrightarrow$" gar nicht hätten einführen brauchen, weil wir ihn gemäß obiger Tautologie auch nur durch die Junktoren „$\rightarrow$" und „$\wedge$" hätten ausdrücken können.

1.4 Zum Schluss wollen wir noch eine Tautologie vorstellen, die wir gelegentlich beim Beweisen einer Aussage „$A \rightarrow B$" verwenden werden.

Satz (Beweisprinzip der *Kontraposition*): *Die folgende Aussage ist eine Tautologie:*

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \qquad (*)$$

Beweis durch Wahrheitstafel:

A	B	$A \rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \rightarrow \neg A$	$(*)$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Übungsaufgaben:

1. (a) Zeigen Sie, dass das folgende „Tertium non datur" eine Tautologie ist:

$$A \vee (\neg A).$$

   (b) Zeigen Sie, dass folgende Formeln Tautologien sind:
      (i) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
      (ii) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

2. Beschreiben Sie alle einstelligen Junktoren durch äquivalente Formeln, die als Junktoren nur „$\neg$" und „$\vee$" enthalten.

3. Geben Sie alle 2-stelligen Junktoren an und drücken Sie diese jeweils durch Formeln aus, die nur „$\neg$" und „$\wedge$" enthalten.

4. Es sei J der 3-stellige Junktor, so dass $J(A, B, C)$ genau dann wahr ist, wenn genau eine der Aussagen A, B, C wahr ist.

   Geben Sie eine Wahrheitstafel für J an und drücken Sie J in einer Formel aus, welche nur „$\neg$", „$\wedge$" und „$\vee$" enthält.

5. Zeigen Sie, dass folgende Formeln Tautologien sind:
   (a) $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
   (b) $((A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow B$

(c) $((A \to B) \to A) \to A$.

6. Prüfen Sie, ob folgende Formeln Tautologien sind:
   (a) $((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C))$
   (b) $((A \to B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$

7. Überlegen Sie sich, wie man die Kontravalenz $\not\leftrightarrow$, die durch die folgende Wahrheitsafel gegeben ist, allein mit den Junktoren „$\neg$“ und „$\to$“ ausdrücken kann.

A	B	$A \not\leftrightarrow B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	f

8. Die Rejektion $\downarrow$ und die Exklusion $|$ sind über folgende Wahrheitstafel definiert.

A	B	$A \downarrow B$	$A \vert B$
w	w	f	f
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	w	w

   Drücken Sie die Junktoren „$\neg$“ und „$\wedge$“ durch äquivalente Formeln aus, die nur den Junktor „$\downarrow$“ bzw. nur den Junktor „$|$“ enthalten.

9. Sei $n \in \mathbb{N}$ und J ein n-stelliger Junktor. Zeigen Sie, dass man J durch eine Formel ausdücken kann, welche nur die Junktoren „$\neg$“ und „$\wedge$“ enthält. (*Hinweis:* Verwenden Sie vollständige Induktion und zeigen Sie, dass

   $$J(A_1, A_2, \ldots, A_n) \leftrightarrow ((A_1 \wedge J(A_2 \vee \neg A_2, A_2, \ldots A_n)) \vee (\neg A_1 \wedge J(A_2 \wedge \neg A_2, A_2, \ldots A_n)))$$

   eine Tautologie ist.)