2 Mengen und Abbildungen

2.1 Die gesamte Mathematik fußt im Grunde auf der *Mengenlehre*. Erst Ende des 19. Jahrhunderts hat man versucht, die Mengenlehre, ähnlch wie es Euklid mehr als 2000 Jahre früher mit der *Geometrie* versuchte, *axiomatisch* einzuführen. Dabei werden wenige *Axiome* aufgestellt, die man als nicht bewiesene Grundtatsachen akzeptiert. Aus diesen wird dann nach und nach, nur mit Hilfe logischer Schlussweisen, wie sie u.a. durch die Aussagenlogik gegeben werden, die Mengenlehre mit ihren grundlegenden Sätzen und später alle anderen Theorien der Mathematik aufgebaut. Zum Beispiel wird durch diese Axiome gesichert, dass es überhaupt eine Menge gibt, z.B. die Menge, die gar keine Elemente hat. Wir nennen sie die *leere Menge* und bezeichnen sie mit $\emptyset$.
Wir wollen diesen axiomatischen Weg in dieser Vorlesung nicht gehen, da dies zu weit vom eigentlichen Thema wegführt, sondern nur einen *naiven Gebrauch* der Mengenlehre benutzen. An der ein oder anderen Stelle weise ich darauf hin, wie man die Existenz und auch die Beweise aus so einer Axiomatik gewährleisten kann.
Für uns ist also eine Menge dann nur eine *Zusammenfassung von wohlbestimmten Objekten*, die wir die *Elemente* der Menge nennen. Oft wird eine Menge einfach durch die Angabe ihrer Elemente angegeben. Wir benutzen dann die geschweiften Klammern, um diese Zusammenfassung der Elemente klarzumachen und schreiben zum Beispiel für die Menge der ersten drei natürlichen Zahlen

$$M = \{1, 2, 3\}.$$

Ist x ein Element von M, so schreiben wir „$x \in M$“.

Die Axiome unserer Mengenlehre müssen auch die Existenz von Mengen mit unendlich vielen Elementen sicherstellen. Diese können nicht alle angegeben werden, was dazu führt, dass man die Notation der *drei Pünktchen* „...“ einführt, wenn sichergestellt wird, „wie es weitergeht“. Ein typisches Beispiel wird durch die *Menge der natürlichen* Zahlen gegeben, die wir mit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, , 3 \ldots\}$$

bezeichnen.

Außerdem wird das Axiomensystem auch die Möglichkeit geben, aus gegebenen Mengen neue zu konstruieren. Zum Beispiel werden wir häufig die Situation vorfinden, dass wir eine *Teilmenge* einer gegebenen Menge M dadurch angeben, dass ihre Elemente durch eine *Eigenschaft* gegeben werden, die einige der Elemente in M eventuell haben und andere eventuell nicht. Wir schreiben dann für eine solche Menge, wenn es sich um die Eigenschaft $\mathcal{E}$ handelt:

$$N = \{x \in M : \mathcal{E}(x)\}.$$

Das soll bedeuten, dass N aus allen Elementen $x \in M$ besteht, die die Eigenschaft $\mathcal{E}$ haben. $\mathcal{E}(x)$ bedeutet dann, dass x die Eigenschaft $\mathcal{E}$ hat. Zum Beispiel wird die Teilmenge der natürlichen Zahlen, die aus den geraden natürlichen Zahlen besteht, so notiert:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\}.$$

Natürlich nennen wir eine Menge N eine *Teilmenge einer Menge M*, wenn gilt:

$$\text{Für alle } x \in N \text{ gilt: } x \in M.$$

Wir schreiben dann $N \subseteq M$. Jede Menge M hat zwei besondere Teilmengen (die im Fall $M = \emptyset$ zusammenfallen), nämlich die *leere Teilmenge* $\emptyset \subseteq M$ und die volle Teilmenge $M \subseteq M$. Daneben gibt es, wenn M mindestens zwei Elemente hat, eine Reihe weiterer. Eine gute Mengenlehre wird Axiome bereitstellen, die gewährleisten, dass die Zusammenfassung aller Teilmengen selbst wieder eine Menge ist, die wir die *Potenzmenge von M* nennen und mit $\mathfrak{P}(M)$ bezeichnen:

$$\mathfrak{P}(M) := \{N : N \subseteq M\}.$$

Für eine Menge N gilt also:

$$N \subseteq M \Leftrightarrow N \in \mathfrak{P}(M).$$

Man muss deshalb so vorsichtig sein, weil nicht beliebige Ansammlungen (von Mengen) selbst wieder eine Menge sein können. Zum Beispiel stellt sich heraus, dass die Gesamtheit aller Mengen nicht wieder eine Menge sein kann. Sie ist in einem gewissen Sinn einfach zu groß. Das bekannteste Beispiel, wie eine Mengenlehre, in der z.B.

$$N = \{x : \mathcal{E}(x)\}$$

eine Menge ist, wo x jetzt über alle Mengen läuft, nicht nur wie oben in einer vorgegebenen Menge, zu Widersprüchen führen kann, ist die *Russelsche Antinomie*, die als Eigenschaft $\mathcal{E}$ folgende nimmt: $x \notin x$ ($x \notin M$ bedeutet $\neg(x \in M)$). Wäre nämlich

$$N := \{x : x \notin x\}$$

eine Menge, so führen beide Möglichkeiten $N \in N$ bzw. $N \notin N$ zu Widersprüchen: Ist $N \in N$, so müsste wegen der definierenden Eigenschaft $\mathcal{E}$ gelten: $N \notin N$. Ist $N \notin N$, so müsste aber genauso $N \in N$ sein.
In einer axiomatischen Mengenlehre lässt man deshalb nur Ansammlungen von Elementen zu, die durch die aufgeführten Axiome kontrolliert und in dieser Hinsicht sparsam sind. Die Gesamtheit aller Mengen oder die Russellsche Ansammlung werden dann keine Mengen sein.

2.2 Wichtige Operationen, die wir für alle Teilmengen einer gegebenen Menge durchführen wollen, sind folgende. (In einer axiomatischen Mengenlehre vereinigt oder schneidet man auch beliebige Mengen, die nicht in einer gegebenen größeren Menge zu liegen brauchen.)

(i) Die *Vereinigung* zweier Teilmengen $N_1, N_2 \subseteq M$:

$$N_1 \cup N_2 := \{x \in M : x \in N_1 \text{ oder } x \in N_2\}$$

(ii) der *Durchschnitt* zweier Teilmengen $N_1, N_2 \subseteq M$:

$$N_1 \cap N_2 := \{x \in M : x \in N_1 \text{ und } x \in N_2\}$$

(iii) die *Differenzmenge* zweier Teilmengen $N_1, N_2 \in M$:

$$N_1 \setminus N_2 := \{x \in N_1 : x \notin N_2\}.$$

Insbesondere benutzen wir für eine Teilmenge $N \subseteq M$ die Notation $\complement N \subseteq M$ für die *Komplementmenge von* N, die gegeben ist durch

$$\complement N := M \setminus N.$$

Es gibt nun eine Reihe von *Rechenregeln* für diese Operationen, dir wir meist erst dann erwähnen, wenn sie gebraucht werden. Exemplarisch wollen wir erwähnen:

$$N_1 \cup (N_2 \cap N_3) = (N_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup N_3). \qquad (*)$$

Um eine solche Gleichheit zu beweisen, benutzt man in der Regel die Tatsache, dass für zwei Teilmengen $N_1, N_2 \subseteq M$ folgendes gilt:

$$N_1 = N_2 \Leftrightarrow (N_1 \subseteq N_2 \text{ und } N_2 \subseteq N_1).$$

Ein Beweis für die Aussage $(*)$ würde dann etwa so verlaufen:

„$\subseteq$": Sei $x \in N_1 \cup (N_2 \cap N_3)$, also $x \in N_1$ oder $x \in N_2 \cap N_3$.
1. Fall: $x \in N_1$.

$$x \in N_1 \Rightarrow x \in N_1 \cup N_2 \text{ und } x \in N_1 \cup N_3 \Rightarrow x \in (N_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup N_3).$$

2. Fall: $x \in N_2 \cap N_3$.

$$\begin{aligned} x \in N_2 \cap N_3 \Rightarrow x \in N_2 \text{ und } x \in N_3 \Rightarrow x \in N_1 \cup N_2 \text{ und } x \in N_1 \cup N_3 \\ \Rightarrow x \in (N_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup N_3) \end{aligned}$$

„$\supseteq$": Sei $x \in (N_1 \cup N_2) \cap (N_1 \cup N_3)$, also $x \in (N_1 \cup N_2)$ und $x \in (N_1 \cup N_3)$.
1. Fall: $x \in N_1$ und damit $x \in N_1 \cup (N_2 \cap N_3)$. 2. Fall: $x \notin N_1$. Dann gilt $x \in N_2$ und $x \in N_3$, also $x \in N_2 \cap N_3$ und damit $x \in N_1 \cup (N_2 \cap N_3)$.

$\square$

(Ein „$\square$" soll bedeuten, dass der Beweis zu Ende ist.)

2.3 Eine wichtige Konstruktion, die unsere Mengenlehre erlauben muss, ist das *cartesiche Produkt zweier Mengen* M_1 *und* M_2. Ihr Elemente sind die *geordneten Paare*

$$(x_1, x_2) \text{ mit } x_1 \in M_1 \text{ und } x_2 \in M_2$$

und wird mit

$$M_1 \times M_2 := \{(x_1, x_2) : x_1 \in M, x_2 \in M_2\}$$

notiert. Man beachte, dass ein geordnetes Paar (x_1, x_2) etwas anderes als die Menge $\{x_1, x_2\}$ ist. Bei einem geordneten Paar kommt es auf die Reihenfolge an. Für $x_1 \neq x_2$ ist (x_1, x_2) verschieden von (x_2, x_1). (Für $M_1 \neq M_2$ liegen sie schon in verschiedenen Mengen $M_1 \times M_2$ und $M_2 \times M_1$.) Bei der Angabe einer Menge durch Aufzählung ihrer Elemente kommt es nicht auf die Reihenfolge an und man darf auch Elemente mehrfach aufführen. Sind z.B. $x_1, x_2 \in M$, für eine Menge M, so sind folgende Teilmengen von M gleich:

$$\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\} = \{x_2, x_1, x_2\}.$$

Eine *Relation* zwischen zwei Mengen A und B ist definitionsgemäß eine Teilmenge $R \subseteq A \times B$. Ist $(x, y) \in A \times B$ in R, so schreiben wir auch xRy. Von besonderer Bedeutung ist folgende Situation:

Definition: Sei A eine Menge. Eine *Äquivalenzrelation auf* A ist eine Relation zwischen A mit sich selbst, die wir oft mit $\sim \subseteq A \times A$ bezeichnen und die folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Für alle $x \in A$ gilt: $x \sim x$ (Reflexivität)

(ii) für alle $x, y \in A$ gilt: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ (Symmetrie)

(iii) für alle $x, y, z \in A$ gilt: ($x \sim y$ und $y \sim z$) $\Rightarrow x \sim z$ (Transitivität).

In vielen mathematischen Aussagen werden die Elemente einer gegebenen Menge M erwähnt. In aller Regel muss über diese *quantifiziert* werden, d.h.: es muss klargemacht werden, für welche Elemente aus M die Aussage gilt. Die mit Abstand wichtigsten *Quantoren* sind dabei:

- *für alle* $x \in M$, was wir häufig mit „$\forall\, x \in M$“ abkürzen;
- *es existiert* $x \in M$, was mit „$\exists\, x \in M$“ abgekürzt wird.

Zum Beispiel taucht in obiger Definition in natürlicher Weise der *Allquantor* $\forall$ auf.
Hat man eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge A gegeben, so kann man für jedes $a \in A$ seine zugehörige *Äquivalenzklasse* bilden, indem man definiert:

$$[a] := \{b \in A : b \sim a\} \subseteq A.$$

Beachte nun, dass aus den Axiomen (i)-(iii) für eine Äquivalenzrelation Folgendes folgt:

Bemerkung: *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A und seien $a, b, \in A$. Dann gilt: Entweder ist $[a] \cap [b] = \emptyset$ oder $[a] = [b]$.*

Beweis: Da $[a] \subseteq A$ niemals leer ist, denn $a \in [a]$ wegen der Reflexivität, schließen sich beide angegebenen Fälle wirklich aus. Denn wäre $[a] \cap [b] = \emptyset$ und $[a] = [b]$, so wäre $[a] = [b] = \emptyset$.

Angenommen $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Zeige dann: $[a] = [b]$. Sei dazu $c \in [a] \cap [b]$. Dann gilt

$$c \sim a \text{ und } c \sim b \overset{(ii)}{\Rightarrow} a \sim c \text{ und } c \sim b \overset{(iii)}{\Rightarrow} a \sim b \Rightarrow a \in [b].$$

Ist nun $d \in [a]$ beliebig, so ist also $d \sim a$ und mit (iii) folgt damit $d \sim b$ bzw. $d \in [b]$. Also: $[a] \subseteq [b]$. Aus Symmetriegründen (vertausche einfach die Rollen von a und b) folgt auch $[b] \subseteq [a]$ und damit insgesamt $[a] = [b]$.

$\square$

Eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A zerlegt also A in eine *disjunkte Vereinigung* von Teilmengen $B_i \subseteq A$, wobei der Index i eine geeignete *Indexmenge* I durchläuft. Bezeichnet nämlich I die Menge aller Äquivalenzklassen, so wählen wir aus jeder eine Element $a_i \in A$ aus. Es ist dann also mit $B_i := [a_i]$:

$$A = \dot{\bigcup_{i \in I}} B_i.$$

Hier haben wir die Vereinigung von zwei Teilmengen $B_1, B_2 \subseteq A$ auf eine beliebige *Familie* $(B_i)_{i \in I}$ von Teilmengen ausgedehnt: Dabei gilt für alle $x \in A$

$$x \in \bigcup_{i \in I} B_i :\Leftrightarrow \exists\, i \in I : x \in B_i$$

und analog

$$x \in \bigcap_{i \in I} B_i :\Leftrightarrow \forall\, i \in I : x \in B_i.$$

Außerdem benutzen wir für zwei Teilmengen $B_1, B_2 \subseteq A$ die Notation $B_1 \dot{\cup} B_2 = B$, wenn $B = B_1 \cup B_2$ und zudem $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ gilt. Für eine beliebige Familie $(B_i)_{i \in I}$ meinen wir mit

$$B = \dot{\bigcup_{i \in I}} B_i.$$

dass $B = \bigcup_{i\in I} B_i$ ist und zudem die Teilmengen B_i $(i \in I)$ *paarweise disjunkt* sind, d.h.:

$$B_i \cap B_j = \emptyset \text{ für alle } i, j \in I \text{ mit } i \neq j.$$

Machen wir diese Situation zu einer neuen Definition:

Definition: Eine *Partition auf einer Menge M* ist eine Familie $(N_i)_{i\in I}$ von nicht-leeren Teilmengen $N_i \subseteq M$ $(i \in I)$, so dass gilt:

(i) $M = \bigcup_{i\in I} N_i$

(ii) für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt: $N_i \cap N_j = \emptyset$.

Nun zeigen wir, dass eine Partition auf einer Menge A im Wesentlichen das Gleiche wie eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A ist. Genauer gilt:

Satz: *Sei A eine Menge. Dann gilt: Zu jeder Partition $P = (B_i)_{i\in I}$ auf A gibt es genau eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A, so dass B_i $(i \in I)$ gerade die Äquivalenzklassen von $\sim$ sind.*

Beweis:

(a) Sucht man nach einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf A, so dass B_i $(i \in I)$ gerade die Äquivalenzklassen von $\sim$ sind, so gibt es dafür nur einen Kandidaten: zu $a, b \in A$ setze

$$a \sim b :\Leftrightarrow \exists\, i \in I : a \in B_i \text{ und } b \in B_i. \qquad (*)$$

Denn für $a \in A$ muss es (genau ein) $i \in I$ geben mit $[a] = B_i$. Ist $b \in A$ mit $b \sim a$, so gilt $b \in [a] = B_i$, also $a, b \in B_i$. Ist umgekehrt $a \in B_i$ und $b \in B_i$ für ein $i \in I$ und B_i eine Äquivalenzklasse von $\sim$, so muss $B_i = [a]$ sein, weil $a \in [a]$ ist (und die Äquivalenzklassen paarweise disjunkt sind). Da also dann auch $b \in B_i = [a]$ ist, folgt $b \sim a$, also $a \sim b$. Es gibt also höchstens eine solche Äquivalenzrelation.

(b) Es bleibt noch zu prüfen, ob $(*)$ wirklich eine Äquivalenzrelation definiert. Machen wir das:

(i) Reflexivität: Sei $a \in A$. Da $A = \bigcup_{i\in I} B_i$ ist, existiert ein $i \in I$ mit $a \in B_i$ und damit gilt $a \sim a$.

(ii) Symmetrie: Seien $a, b \in A$ mit $a \sim b$. Dann existiert ein $i \in I$ mit $a \in B_i \wedge b \in B_i$. Da der Junktor „$\wedge$“ symmetrisch ist (d.h. $(\Phi \wedge \Psi) \leftrightarrow (\Psi \wedge \Phi)$ ist eine Tautologie), folgt auch $b \in B_i \wedge a \in B_i$, also $b \sim a$.

(iii) Transitivität: Seien $a, b, c \in A$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$. Dann existiert ein $i \in I$ mit $a \in B_i$ und $b \in B_i$ und es existiert ein $j \in I$ mit $b \in B_j$ und $c \in B_j$. Falls $i \neq j$, so müsste $B_i \cap B_j = \emptyset$ gelten, was wegen $b \in B_i \cap B_j$ nicht möglich ist. Damit folgt $i = j$ und es ist also $a \in B_i$ und $c \in B_i$, d.h. $a \sim c$.

$\square$

Man fasst nun üblicherweise die Äquivalenzklassen eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge A selbst zu einer neuen Menge zusammen (die wir im Wesentlichen schon früher durch die Indexmenge I benutzt haben) und nennt dies die *die Quotientenmenge von A nach der Äquivalenzrelation* $\sim$, also

$$Q := \{[a] \in \mathfrak{P}(A) : a \in A\} \subseteq \mathfrak{P}(A).$$

Q ist also eine Teilmenge der Potenzmenge und wird auch als $A/\sim$ bezeichnet (gelesen „A modulo $\sim$"). Äquivalenzrelationen tauchen immer dann auf, wenn man verschiedene Elemente einer gegebenen Menge A zusammenfassen will, weil es einem innerhalb einer solchen Äquivalenzklasse B nicht darauf ankommt, welchen *Repräsentanten von B* man benutzt. Wir nennen in einer Äquivalenzklasse $B \subseteq A$ jedes Element $b \in A$ mit $[b] = B$ einen Repräsentanten von B.
In dem folgenden Beispiel benutzen wir einen naiven Umgang mit der *Addition* und der *Subtraktion* auf der *Menge der ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Beispiel: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren für $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$x \sim y :\Leftrightarrow n \mid (x - y). \qquad (*)$$

Hier benutzen wir für zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die Notation

$$a \mid b :\Leftrightarrow \exists\, m \in \mathbb{Z} : a \cdot m = b$$

und sagen: „a teilt b", „a ist ein Teiler von b" oder „b ist ein Vielfaches von a".

Dass im Beispiel n ein Teiler von $(x - y)$ ist, bedeutet also, dass sich y und x um ein Vielfaches von n unterscheiden.
Wir behaupten, dass $(*)$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist, denn:

(i) Reflexivität: Für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x \sim x$, denn $n \mid x - x$, da $x - x = 0$ und $n \cdot 0 = 0$ ist;

(ii) Symmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \sim y$. Dann gilt $n \mid (x - y)$ und somit existiert ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $n \cdot r = x - y$. Daraus folgt $n \cdot (-r) = -n \cdot r = -(x - y) = y - x$, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ (nämlich $m := -r$) mit $n \cdot m = y - x$. Also gilt $n \mid (y - x)$ bzw. $y \sim x$.

(iii) Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, also $n \mid (x - y)$ und $n \mid (y - z)$. Damit existieren $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $n \cdot r = x - y$ und $n \cdot s = y - z$ und es gilt

$$n \cdot (r + s) = n \cdot r + n \cdot s = (x - y) + (y - z) = x - z.$$

Also gilt $n \mid (x - z)$ und $x \sim z$.

$\square$

Die Äquivalenzklassen von $\sim$ auf $\mathbb{Z}$ sehen also so aus:

$$\begin{aligned}
\overline{0} &:= [0] = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, \dots\} \\
\overline{1} &:= [1] = \{\dots, -2n+1, -n+1, 1, n+1, 2n+1, \dots\} \\
&\vdots \\
\overline{n-1} &:= [n-1] = \{\dots, \underbrace{-2n+n-1}_{=-n-1}, -1, n-1, 2n-1, \dots\}
\end{aligned}$$

und die Quotientenmenge also so:

$$Q = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

2.4 Einer der wichtigsten Begriffe in der Mathematik wird durch eine Abbildung zwischen zwei Mengen gegeben. Wir definieren eine *Abbildung von A nach B* als eine Relation R zwischen A und B, so dass gilt: zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit aRb. Wir fassen dann R als eine *Zuordnung* auf und schreiben $f : A \to B$, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet. Wir schreiben dafür dann auch $b = f(a)$ oder $f : a \mapsto b$. Zur Abbildung $f : A \to B$ gehört der *Graph* G_f,

$$G_f := \{(a, b) \in A \times B : b = f(a)\}.$$

Oft unterscheiden wir die Zuordnung $f : A \to B$ von ihrem Graphen $G_f \subseteq A \times B$, obwohl das nach Definition von f durch eine Relation eigentlich das Gleiche ist, $R = G_f$. Es hat traditionelle Gründe f von G_f zu unterscheiden.
Abbildungen treten an allen Ecken und Enden in der Mathematik auf. Hier sind einige Beispiele:

Beispiele:

1. Sei A eine Menge. Dann wird die Abbildung $f : A \to A$, die jedes Element $x \in A$ festlässt, also

   $$\forall\, x \in A : f(x) = x, \qquad \text{(für den Fall } A = \emptyset \text{ siehe Bsp. 3)}$$

   als *Identität auf A* bezeichnet und mit id_A notiert: $\mathrm{id}_A = f$.

2. Ist A eine Menge und $B \subseteq A$, so wird die Abbildung $i : B \to A$ mit

   $$\forall\, x \in B : i(x) = x$$

   als *Inklusion von B nach A* bezeichnet (eigentlich $i_{B,A}$, aber der Kürze wegen nur i).

3. Seien A und B Mengen. Dann werden die Abbildungen

$$\mathrm{pr}_A : A \times B \to A : (a,b) \mapsto a$$
$$\mathrm{pr}_B : A \times B \to B : (a,b) \mapsto b$$

als (kanonische) *Projektionen von $A \times B$ auf A bzw. B* bezeichnet.
Ist f eine Abbildung auf einem cartesischem Produkt, sagen wir $f : A \times B \to C$ (für Mengen A, B und C), so vereinbaren wir die Notation

$$f(a,b) := f((a,b))$$

für $(a,b) \in A \times B$, um Klammern zu sparen.
Man beachte übrigens den manchmal auftauchenden Fall einer Abbildung $f : A \to B$, wo A die leere Menge $\emptyset$ ist. In diesem Fall gibt es genau eine Abbildung $f : \emptyset \to B$ (für jede Menge B), denn

$$\emptyset \times B = \emptyset.$$

(Es gibt keine Paare $(a,b) \in \emptyset \times B$, denn es gibt keine Elemente $a \in \emptyset$.) Denn es gibt genau eine Relation R zwischen $\emptyset$ und B, nämlich $R = \emptyset$. Die leere Menge hat genau eine Teilmenge $\mathfrak{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, ist also selber nicht-leer. Wir bezeichnen dieses $f : \emptyset \to B$ als die *leere Abbildung*. Im Spezialfall, dass B selbst leer ist, $B = \emptyset$, fällt die leere Abbildung mit der Identität zusammen. (So definieren wir $\mathrm{id}_\emptyset$). Die Fälle, dass A oder B leer sind, sind also in den eben definierten Fällen der Projektionen enthalten.

4. Sei A eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation und $Q \subseteq \mathfrak{P}(A)$ ihre Quotientenmenge. Dann wird die Abbildung

$$\pi : A \to Q = A/{\sim} : a \mapsto [a]$$

als *kanonische Projektion* von A auf ihren Quotienten bezeichnet. Der Fall, dass $A = \emptyset$ ist, ist durchaus enthalten. Der Leser möge sich selbst überlegen, dass π dann zu $\mathrm{id}_\emptyset$ wird.

2.5 Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Dann bezeichnen wir für jede Teilmenge $A \subseteq M$ mit

$$f(A) := \{f(x) \in N : x \in A\} \subseteq N$$

das *Bild von A unter f*. Weiterhin nennen wir für jedes $B \subseteq N$ mit

$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\} \subseteq M$$

das *Urbild von B unter f*.

Als Nächstes beobachten wir, dass sich das Urbildnehmen gut mit Vereinigung und Durchschnitt im folgenden Sinne verträgt:

Bemerkung: *Sei $f : M \to N$ eine Abbildung sowie $B_1, B_2 \subseteq N$. Dann gilt:*

(i) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

(ii) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

Beweis: (i): Sei $x \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cup B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \vee f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \vee x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

(ii): Sei $x \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2) &\Leftrightarrow f(x) \in B_1 \cap B_2 \Leftrightarrow f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \wedge x \in f^{-1}(B_2) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

□

Dagegen verhält sich das Bildnehmen nicht ganz optimal. Immerhin gilt:

Bemerkung: *Sei $f : M \to N$ eine Abbildung sowie $A_1, A_2 \subseteq M$. Dann gilt:*

(i) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

(ii) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$

Beweis: (i) Sei $y \in N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cup A_2) &\Leftrightarrow \exists\, x \in A_1 \cup A_2 : f(x) = y \Leftrightarrow \exists\, x \in A_1 : f(x) = y \vee \exists\, x \in A_2 : f(x) = y \\ &\Leftrightarrow y \in f(A_1) \vee y \in f(A_2) \Leftrightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

(ii) Sei $y \in f(A_1 \cap A_2)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y \in f(A_1 \cap A_2) \Rightarrow & \exists\, x \in A_1 \cap A_2 : f(x) = y \\ \Rightarrow & \exists\, x_1 \in A_1 : f(x_1) = y \wedge \exists\, x_2 \in A_2 : f(x_2) = y \\ & \quad (\text{nämlich } x_1 := x \text{ und } x_2 := x) \\ \Rightarrow & y \in f(A_1) \wedge y \in f(A_1) \Rightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2). \end{aligned}$$

□

Man beachte, dass man den 2. Pfeil „$\Rightarrow$“ im Beweis nicht umkehren kann, da man im Allgemeinen nur zwei Urbilder $x_1 \in A_1$ und $x_2 \in A_2$ von $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$ finden kann, die nicht notwendig übereinstimmen müssen. Ist etwa

$$M = \{1, 2\},\ A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2\} \text{ und } N = \{1\},$$

so gilt für die (einzige) Abbildung $f : M \to N : x \mapsto 1$, dass $f(A_1) = N = f(A_2)$, also $f(A_1) \cap f(A_2) = N$. Allerdings ist $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und damit auch $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$. Also ist

$$f(A_1 \cap A_2) = \emptyset \subsetneq N = f(A_1) \cap f(A_2).$$

(Mit $A \subsetneq B$ meinen wir: $A \subseteq B$ und $A \neq B$.) Man sieht schon, dass dieser Defekt daran liegt, dass es bei einer Abbildung $f : A \to B$ verschiedene Elemente $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ geben kann, die auf das gleiche Bild $y \in B$ abgebildet werden, $y = f(x_1) = f(x_2)$.

Definition: Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Wir nennen f

(a) *injektiv*, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$ gilt:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

(b) *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in B$ ein $x \in A$ mit $f(x) = y$ gibt.

(c) *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Will man die Injektivität einer gegebenen Abbildung prüfen, benutzt man oft die Kontraposition (siehe §1) von (a), also

$$\forall\, x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Bedingung (b) bedeutet offenbar, dass $f(A) = B$ ist und Bedingung (c) kann man so ausdrücken, dass es zu jedem $y \in B$ *genau ein* $x \in A$ mit $f(x) = y$ gibt.

Für eine injektive Abbildung kann man nun offenbar die Folgerichtungen im Beweis der Bemerkung umkehren, denn aus $f(x_1) = y = f(x_2)$ mit $x_1 \in A_1$ und $x_2 \in A_2$ folgt ja nun, dass $x_1 = x_2$, also $x := x_1 = x_2 \in A_1 \cap A_2$ ist. Für ein injektives $f : M \to N$ gilt also für alle $A_1, A_2 \subseteq M$ auch:

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

Ist eine Abbildung $f : A \to B$ bijektiv, so können wir die folgende *Umkehrabbildung* $f^{-1} : B \to A$ definieren: Für $y \in B$ und $x \in A$ gilt

$$f^{-1}(y) = x :\Leftrightarrow f(x) = y.$$

Es gibt ja zu $y \in B$ genau ein Urbild von y und dieses nennen wir $f^{-1}(y)$.

Man beachte, dass man die Umkehrabbildung $f^{-1} : B \to A$ von $f : A \to B$ nur dann definieren kann, wenn f bijektiv ist. Dagegen kann man das Urbild der einelementigen Teilmenge $\{y\} \subseteq B$ stets nehmen. Im Falle, dass f bijektiv ist, ist eben $f^{-1}(\{y\})$ auch einpunktig und ihr Element bezeichnen wir eben mit $f^{-1}(y)$,

$$f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}.$$

Im allgemeinen Fall kann $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$ sein, wenn f nicht surjektiv ist und $y \notin f(A)$ oder $f^{-1}(\{y\})$ kann mehrere Elemente haben (z.B. $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$), wenn f nicht injektiv ist.

2.6 Eine wichtige Operation, die man mit Abbildungen $f : A \to B$ machen kann, wenn gewisse Bedingungen an ihren *Zielbereich* B bzw. ihren *Defintionsbereich* A erfüllt sind, ist ihre sogenannte *Komposition* oder *Hintereinanderausführung*. Genauer:

Definition: Seien $f : A \to B$ und $g : C \to D$ Abbildungen und B eine Teilmenge von C, $B \subseteq C$. Dann definieren wir die *Komposition von g mit f* durch die Abbildung

$$g \circ f : A \to D : x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x))$$

und sprechen dies als „g komponiert mit f“ oder „g nach f“.

Im Allgemeinen macht es in obiger Situation gar keinen Sinn auch die Komposition $f \circ g$ zu bilden, denn dazu müsste ja D eine Teilmenge von A sein. Aber selbst wenn das so ist, haben $g \circ f : A \to D$ und $f \circ g : C \to B$ im Allgemeinen verschiedene Definitions- und Zielbereiche. Und selbst wenn alle vier Mengen A, B, C, D übereinstimmen, gibt es keinen Grund anzunehmen, warum dann $g \circ f : A \to A$ und $f \circ g : A \to A$ übereinstimmen sollen.

Nehmen wir z.B. $A = \{1, 2\}$ und für $f, g : A \to A$ die Abbildungen

$$f(1) = f(2) = 1, \quad g(1) = g(2) = 2.$$

Dann ist etwa

$$(g \circ f)(1) = 2, \text{ aber } (f \circ g)(1) = 1,$$

also

$$g \circ f \neq f \circ g.$$

Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und $C \subseteq A$, so wird die *Einschränkung von f auf C* $f|_C : C \to B$ mit

$$\forall\, x \in C : f|_C\,(x) := f(x)$$

eingeführt. Beachte, dass mit der Inklusion $i : C \to A$

$$f|_C = f \circ i$$

ist

Eine besondere Rolle bezüglich der Komposition spielen die identischen Abbildungen $\mathrm{id}_A : A \to A$. Ist nämlich $f : A \to B$ eine Abbildung, so gilt offenbar

$$\mathrm{id}_B \circ f = f, \quad f \circ \mathrm{id}_A = f.$$

Eine weitere Bedeutung der Identitäten id_A und id_B liegt in folgendem Satz.

Satz: *Sei $f : A \to B$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt, so dass gilt:*

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \ \textit{ und } f \circ g = \mathrm{id}_B .$$

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei also f bijektiv. Wir betrachten dann $g := f^{-1} : B \to A$ und prüfen für $x \in A$: $(g \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x = \mathrm{id}_A(x)$, weil $x \in A$ das eindeutige Urbild unter f von $f(x)$ ist. Ebenso ist für $y \in B$

$$(f \circ g)(y) = f(f^{-1}(y)) = y = \mathrm{id}_B(y),$$

weil $f^{-1}(y)$ das Urbild von y unter f ist also $f(f^{-1}(y)) = y$.
Es ist also

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \ \text{ und } f \circ g = \mathrm{id}_B .$$

„$\Leftarrow$“: Aus $g \circ f = \mathrm{id}_A$ folgt, dass f injektiv ist, denn ist $f(x_1) = f(x_2)$ für $x_1, x_2 \in A$, so ist

$$x_1 = \mathrm{id}_A(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = \mathrm{id}_A(x_2) = x_2,$$

also ist f injektiv. Aus $f \circ g = \mathrm{id}_B$ folgt, dass f surjektiv ist, denn ist $y \in B$ beliebig, so ist offenbar $g(y)$ ein Urbild von y unter f, denn

$$f(g(y)) = (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_B(y) = y.$$

Also ist f surjektiv.
Beides zusammen ergibt, dass f bijektiv ist (und g stellt sich dann als f^{-1} heraus).

$\square$

2.7 Injektive bzw. bijektive Abbildungen sind auch geeignet Größenvergleiche zwischen Mengen anzustellen, auch wenn diese unendlich sind. Hat man zwei endliche Mengen A und B und notiert mit $|A| \in \mathbb{N}_0$ bzw. $|B| \in \mathbb{N}_0$ die Anzahl ihrer Elemente, so ist zunächst Folgendes klar:

(i) $|A| \leq |B| \Leftrightarrow$ es existiert ein injektives $f : A \to B$

(ii) $|A| = |B| \Leftrightarrow$ es existiert ein bijektives $f : A \to B$.

Hierbei notieren wir mit „$\leq$“ (bzw. die daraus abgeleiteten „$<$“, „$\geq$“, „$>$“) die natürliche Ordnung auf den natürlichen Zahlen (einschließlich der Null) $\mathbb{N}_0$.

Klar: Denn hat A sagen wir $n \in \mathbb{N}_0$ Elemente, so ist eine Nummerierung der Elemente von A gerade durch eine bijektive Abbildung $g : \{1, \ldots, n\} \to A$ gegeben. Für $n = 0$ fassen wir $\{1, \ldots, n\}$ als die leere Menge auf. Wählen wir für A und B bei $n := |A|$ und

$m := |B|$ solche Bijektionen $g : \{1, \dots, n\} \to A$ und $h : \{1, \dots, m\} \to B$, so kann man die Richtung „$\Rightarrow$" in (i) mit Hilfe der Inklusion

$$i : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\} \qquad (\text{für } n \leq m)$$

so einsehen: Definiere einfach $f : A \to B$ durch $f := h \circ i \circ g^{-1}$, d.h. setze f so, dass das folgende Diagramm *kommutativ* ist:

$$\begin{tikzcd}
\{1, \dots, n\} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"', "\simeq"] & \{1, \dots, m\} \arrow[d, "h", "\simeq"'] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

(Kommutativität bedeutet hier $h \circ i = f \circ g$ und mit $\simeq$ wird angezeigt, dass g bzw. h bijektiv ist, also g^{-1} bzw. h^{-1} existiert.)

Da die Verkettung von zwei injektiven Abbildungen wieder injektiv ist und alle drei Faktoren h, i und g^{-1} injektiv sind, folgt, dass f injektiv ist. Wir überlassen die andere Richtung und Aussage (ii) dem Leser zur Übung.

Diese Beobachtung macht man nun zur Grundlage des Größenvergleichs auch bei unendlichen Mengen. Man definiert:

Definition: Seien A und B Mengen.

(a) Wir sagen, dass B *mächtiger als* A ist (genauer wäre zu sagen: „mächtiger oder gleichmächtig zu A"), wenn es eine injektive Abbildung $f : A \to B$ gibt und schreiben dann:

$$A \lesssim B.$$

(b) Wir sagen, dass A *gleichmächtig zu* B ist, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt und schreiben dann:

$$A \simeq B.$$

Es gibt nun einige naheliegende Eigenschaften der Relation $\lesssim$ auf allen Mengen, zum Beispeil ist sie *reflexiv* im Sinne von

$$A \lesssim A$$

für alle Mengen A, denn die Identität $\mathrm{id}_A \to A$ ist injektiv. Außerdem ist sie *transitiv* im Sinne von: Für Mengen A, B und C gilt

$$A \lesssim B \text{ und } B \lesssim C \Rightarrow A \lesssim C,$$

denn die Verkettung zweier injektiver Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ ist eine injektive Abbildung von A nach C. Was aber keineswegs so klar ist, ist die folgende *Antisymmetrie* von $\lesssim$. Für Mengen A und B gilt

$$A \lesssim B \text{ und } B \lesssim A \Rightarrow A \simeq B.$$

Das ist gerade der Inhalt des folgenden bekannten Satzes:

Satz (Schröder-Bernstein): *Seien A und B Mengen. Ist B mächtiger als A und ist A mächtiger als B, so sind A und B gleichmächtig.*

Der Satz behauptet also, dass man aus zwei gegebenen injektiven Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to A$ ein bijektives $h : A \to B$ konstruieren kann.

Hat man eine injektive Abbildung $f : A \to B$, so kann man durch Einschränkung des Wertebereichs von B auf das Bild $f(A) \subseteq B$ leicht eine bijektive Abbildung durch

$$\overline{f} : A \to f(A) : x \mapsto \overline{f}(x) := f(x)$$

machen. Die Injektivität wird ja beim Übergang von f zu $\overline{f}$ nicht zerstört, da ja die Abbildungsvorschrift die gleiche bleibt. Und Surjektivität wir ja nun offenbar durch die Einschränkung des Wertebereiches erzielt. Es ist also $\overline{f}$ bijektiv und wird meist (nicht ganz sauber) ebenfalls mit f bezeichnet. Man hat dann also auch die Umkehrabbildung

$$\overline{f}^{-1} : f(A) \to A$$

von $\overline{f}$, die wir aber einfach mit f^{-1} bezeichnen. Ebenso verfahren wir mit g. Man beachte aber, dass wir $f^{-1}(y)$ bzw. $g^{-1}(x)$ für $x \in A$ und $y \in B$ nur bilden können, wenn $y \in f(A)$ ist bzw. $x \in g(B)$. Mit diesen Vorbereitungen gehen wir nun in den

Beweis: Wir zerlegen A in drei paarweise disjunkte Teilmengen A_+, A_- und A_∞, also

$$A = A_+ \dot{\cup} A_- \dot{\cup} A_\infty$$

wie folgt. Für jedes $x \in A$ prüfen wir zunächst, ob $x \in g(B)$ ist. Wenn ja, bilden wir $y := g^{-1}(x) \in B$ und prüfen, ob dieses in $f(A)$ liegt. Wenn ja bilden wir $f^{-1}(y)$ und fahren so fort. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge von Elementen

$$x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))), \text{usw.}$$

Nun unterscheiden wir die drei sich gegenseitig ausschließenden Fälle:

(i) Die Folge bricht nach einer ungeraden Anzahl von Schritten ab, d.h. x liegt nicht in $g(B)$ bzw. $f^{-1}(\ldots)$ liegt nicht in $g(B)$. Die Menge aller dieser x sei gerade A_+

(ii) Die Folge bricht nach einer geraden Anzahl von Schritten ab, d.h. $g^{-1}(\dots)$ ist nicht mehr in $f(A)$. Diese Elemente fassen wir in A_- zusammen.

(iii) Die Folge bricht nicht ab: ihre Mitglieder sind stets in $f(A)$ bzw. $g(B)$. Diese fassen wir in A_∞ zusammen.

Und nun setzen wir $h : A \to B$ wie folgt:

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A_+ \\ g^{-1}(x) & \text{falls } x \in A_- \\ f(x) & \text{falls } x \in A_\infty \quad (\text{oder } g^{-1}(x)) \end{cases}$$

Beachte, dass man $g^{-1}(x)$ im Falle von $x \in A_-$ bilden kann, da die Folge ja frühstens an der 2. Stelle abbricht, x also in jedem Fall in $g(B)$ liegt.
Wir behaupten, dass dieses h dann bijektiv ist.

Dazu zerlegen wir B ganz entsprechend in

$$B = B_+ \dot\cup B_- \dot\cup B_\infty,$$

entsprechend dem Verhalten der Folge

$$y, f^{-1}(y), g^{-1}(f^{-1}(y)), \text{usw.} \qquad (*)$$

für $y \in B$. Und nun beobachten wir, dass h die Teilmenge A_+ bijektiv nach B_- abbildet, denn ist $x \in A_+$, so ist offenbar $y := f(x)$ in B_-, weil die Folge $(*)$ dann

$$y, x, g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), \text{usw.}$$

ist, also die Folge, die man für x erhält, nur um einen Stellenplatz verschoben, indem y vorangestellt wurde. Jedes Element $y \in B_-$ wird auch von $h|_{A_+} : A_+ \to B_-$ getroffen, denn $f^{-1}(y) =: x$ ist offenbar ein Urbild. Da die Funktionsvorschrift von $h|_{A_+}$ mit der von f übereinstimmt, ist $h|_{A_+}$ auch injektiv. Wir halten also fest, dass $h|_{A_+} : A_+ \to B_-$ bijektiv ist.

Genauso sieht man, dass h die Teilmenge A_- nach B_+ abbildet und dass $h|_{A_-} : A_- \to B_+$ ebenfalls bijektiv ist, denn die Folge von $y = g^{-1}(x)$ (für $x \in A_-$) ist ja gerade

$$g^{-1}(x), f^{-1}(g^{-1}(x)), \text{usw.}$$

also die gleiche, wie die von x, nur um eins nach links verschoben, weil das Glied x vorne weggelassen wurde. Schließlich ist mit $(*)$ auch klar, dass h die Teilmengen A_∞ und B_∞ bijektiv ineinander abbildet. Insgesamt ergibt sich dann durch eine leichte Überlegeng, dass auch $h : A \to B$ als Ganzes bijektiv ist.

$\square$

Mit etwas mehr Hilfsmitteln aus der (naiven) Mengenlehre kann man zeigen, dass je zwei Mengen A und B stets vergleichbar sind, in dem Sinne dass

$$A \lesssim B \text{ oder } B \lesssim A$$

gilt. Für den Fall der Menge der natürlichen Zahlen und einer unendlichen Menge A ist das klar. Es gilt dann stets:

Bemerkung: *Ist A eine unendliche Menge, so ist $\mathbb{N} \lesssim A$.*

In diesem Sinne ist $\mathbb{N}$ also die kleinste unendliche Menge.

Der Beweis ist klar, weil man ein injektives $f : \mathbb{N} \to A$ z.B. *rekursiv* angeben kann. Das heißt, dass man $f(1)$ angibt, dann davon ausgeht, dass man für ein $n \in \mathbb{N}$ schon $f(1), \ldots, f(n)$ angegeben hat und aus diesen Informationen heraus $f(n+1)$ angibt.

Dem liegt das Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* für Aussagen über natürliche Zahlen zu Grunde. Es besagt Folgendes:

Beweisprinzip der Vollständigen Induktion: Ist $\mathcal{E}$ eine Aussage über natürliche Zahlen und ist

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{E}(n)\} \qquad (\mathcal{E}(n) \text{ heißt } \mathcal{E} \text{ gilt für } n \in \mathbb{N}),$$

so gilt: Gilt

(i) $1 \in A$, (Induktionsanfang)

(ii) für alle $n \in \mathbb{N}$: $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$,

so muss $A = \mathbb{N}$ sein (also $\mathcal{E}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig).

Eine solche rekursive Definition von $f : \mathbb{N} \to A$ kann man nun leicht angeben. Da $|A| = \infty$ ist, ist A schon mal nicht leer. Wir wählen ein Element $a_1 \in A$ und setzen $f(1) = a_1$. Nun sei $n \in \mathbb{N}$ und wir nehmen an, dass $a_i := f(i)$ für $i = 1, \ldots, n$ schon definiert ist und alle $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschieden sind. Da nun $A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ immer noch nicht-leer ist (sonst wäre A endlich), gibt es ein $a_{n+1} \in A \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ und wir setzen

$$f(n+1) := a_{n+1}.$$

Auf diese Weise erhält man eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Elementen, die paarweise verschieden sind, d.h. $f : \mathbb{N} \to A : i \mapsto a_i$ ist injektiv.

$\square$

Bis hierher ist gar nicht klar, ob es überhaupt Mengen gibt, die echt mächtiger als $\mathbb{N}$ sind.

Definition: Wir nennen eine Menge A *abzählbar*, wenn sie endlich ist oder gleichmächtig zu den natürlichen Zahlen.

Im letzteren Fall nennen wir sie auch *abzählbar unendlich.* Definitionsgemäß gibt es alsdann eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to A$. Beachte aber, dass wegen der Bemerkung und des Satzes sogar Folgendes gilt:

Korollar: *Eine unendliche Menge A ist genau dann abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to A$ gibt.*

Beweis: Da π surjektiv ist, kann man zu jedem $a \in A$ ein Urbild $g(a) \in \mathbb{N}$ unter π wählen, d.h.: $(\pi \circ g)(a) = a$. (Wir sagen auch, dass π ein *Rechtsinverses* g hat, weil

$$\pi \circ g = \mathrm{id}_A$$

ist.) Dieses g muss injektiv sein, weil id_A injektiv ist (siehe Übungsaufgabe). Wir erhalten also ein injektives $g : A \to \mathbb{N}$. Da A unendlich ist, haben wir nach der Bemerkung auch ein injektives $f : \mathbb{N} \to A$. Nach dem Satz von Schröder-Bernstein gibt es dann auch ein bijektives $h : \mathbb{N} \to A$, d.h. $A \simeq \mathbb{N}$. Die umgekehrte Richtung ist trivial, weil ein bijektives f ja insbesondere surjektiv ist.

$\square$

Tatsächlich ist es gar nicht so einfach, durch mengentheoretische Operationen aus der Klasse der abzählbaren Mengen herauszukommen. Nehmen wir z.B. zwei abzählbar unendliche Teilmengen B_1 und B_2 einer Menge M. Es ist dann auch $B_1 \cup B_2$ abzählbar unendlich.

Zerlegen wir dazu $\mathbb{N}$ in die geraden und ungeraden Zahlen A_1 und A_2,

$$\mathbb{N} = A_1 \dot\cup A_2.$$

Beide Teilmengen sind natürlich gleichmächtig zu $\mathbb{N}$. Das folgt einerseits aus dem Satz von Schröder-Bernstein, weil natürlich für A_1 und A_2 als Teilmengen von $\mathbb{N}$ zunächst gilt, dass $A_1 \lesssim \mathbb{N}$ und $A_2 \lesssim \mathbb{N}$ (vermöge der Inklusionen), andererseits, weil sie unendlich sind, auch $\mathbb{N} \lesssim A_1$ und $\mathbb{N} \lesssim A_2$. Es gibt also Bijektionen $\mathbb{N} \to A_1$ und $\mathbb{N} \to A_2$, die wir in diesem Fall natürlich auch einfach angeben könnten, z.B. durch

$$f_1 : \mathbb{N} \to A_1 : n \mapsto 2n,$$
$$f_2 : \mathbb{N} \to A_2 : n \mapsto 2n - 1.$$

Beachte, dass also echte Teilmengen von Mengen durchaus gleichmächtig sein können. In diesem Sinne haben also z.B. die natürlichen Zahlen und die geraden natürlichen Zahlen gleich viele Elemente.

Sind nun etwa $\pi_1 : \mathbb{N} \to B_1$ und $\pi_2 : \mathbb{N} \to B_2$ Bijektionen, so definiere $h : \mathbb{N} \to B_1 \cup B_2$ durch

$$h(n) := \begin{cases} (\pi_1 \circ f_1^{-1})(n) & \text{falls } n \text{ gerade ist} \\ (\pi_2 \circ f_2^{-1})(n) & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Es ist dann offenbar h surjektiv und damit ist die unendliche Menge $B_1 \cup B_2$ gemäß dem vorigen Korollar abzählbar.

Damit sehen wir leicht, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Vereinigung $B_1 \dot\cup \ldots \dot\cup B_n$ von abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist. Es gilt sogar:

Bemerkung: *Abzählbare Vereinigungen von abzählbaren Mengen sind abzählbar.*

Sei dazu also nun $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Familie* (oder wie man sagt: eine *Folge*) von abzählbaren Mengen und nehmen wir an, dass sie Obermenge M enthalten sind. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\pi_n : \mathbb{N} \to B_n$ eine Bijektion. Wir wollen eine surjektive Abbildung $\pi : \mathbb{N} \to B$ mit

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

bauen. Dazu zerlegen wir nun $\mathbb{N}$ disjunkt in eine abzählbare Vereinigung von unendlichen Mengen,

$$\mathbb{N} = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n,$$

indem wir etwa die natürlichen Zahlen in einem Gitter so anlegen:

	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	1	2	4	7	11	$\cdots$
2	3	5	8	$\iddots$		
3	6	9				
4	10					
5						
$\vdots$						

Die Teilmenge, die sich in der n-ten Zeile ergibt, nennen wir A_n. Offenbar sind diese unendlich. Es gibt also für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Bijektion $f_n : \mathbb{N} \to A_n$, die wir jetzt nicht mehr so leicht explizit angeben können. Dann machen wir einfach das Gleiche wie vorher und setzen $h : \mathbb{N} \to B$, mit

$$h(n) := (\pi_{\sigma(n)} \circ f^{-1}_{\sigma(n)})(n) \text{ für } n \in A_{\sigma(n)},$$

wo $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gerade den Index des Mitgliedes A_k von $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ angibt, in dem n liegt, $n \in A_{\sigma(n)}$. Es ist leicht zu sehen, dass h surjektiv ist.

Das zeigt auch, dass das cartesiche Produkt $A \times B$ zweier abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist. Im Grunde haben wir eben eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ benutzt. Aber wir könnten hier jetzt auch so argumentieren, dass $A \times B$ wegen

$$A \times B = \dot{\bigcup_{b\in B}} A \times \{b\}$$

eine abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist.

Nun brauchen wir zum Schluss aber auch noch eine Konstruktion, die die Existenz überabzählbarer Mengen zeigt. Hier gibt es G. Cantors berühmten

Satz (Cantor): *Sei A eine beliebige Menge. Dann ist ihre Potenzmenge $\mathfrak{P}(A)$ echt mächtiger als A, also $A \lesssim \mathfrak{P}(A)$, aber $A \not\simeq \mathfrak{P}(A)$.*

Beweis: Setzt man $f : A \to \mathfrak{P}(A) : x \mapsto \{x\}$, so ist f sicher injektiv und damit $A \lesssim \mathfrak{P}(A)$. Angenommen es wäre auch $\mathfrak{P}(A) \lesssim A$ und damit $A \simeq \mathfrak{P}(A)$. Wir zeigen aber, dass eine Abbildung $f : A \to \mathfrak{P}(A)$ nicht surjektiv sein kann. Definiere nämlich die Teilmenge $B \subseteq A$ durch

$$B := \{a \in A : a \notin f(a)\}.$$

Diese Teilmenge kann nicht im Bild von f liegen, denn wäre $B = f(a)$, für ein $a \in A$, so führen beide Fälle $a \in B$ und $a \notin B$ zum Widerspruch: Ist $a \in B$, so ist $a \notin f(a) = B$. Ist $a \notin B$, also $a \notin f(a)$, so müsste $a \in B$ sein. f ist also nicht surjektiv.

$\square$

Wiederholte Anwendung diese Satzes zeigt, dass es also immer mächtigere Mengen gibt. $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist mächtiger als $\mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^2(\mathbb{N}) := \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ ist mächtiger als $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$, usw.

Wir wollen zum Abschluss den Begriff einer Familie, insbesondere den einer Folge klären. Zu einer Familie gehört immer eine *Indexmenge*, oft mit I bezeichnet. Eine *Familie* von Elementen aus einer Menge M ist dann einfach eine Abbildung $f : I \to M$. Sie wird dann meist, wenn für jedes $i \in I$ jeweils $a_i = f(i)$ ist, mit $(a_i)_{i\in I}$ notiert.

Eine Familie von Teilmengen $(A_i)_{i\in I}$ einer gegebenen Menge M ist darin auch enthalten, wenn man $f : I \to \mathfrak{P}(M) : i \mapsto A_i$ betrachtet.

Der Spezialfall, wenn I die natürlichen Zahlen sind, wird mit *Folge* bezeichnet.

Übungsaufgaben:

1. (a) Untersuchen Sie folgende Relationen auf $\mathbb{Z}$ auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität:

$$R_1 := \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : a \neq b\}, \qquad R_2 := \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : a\cdot b > 0\},$$
$$R_3 := \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : a \mid b\}, \qquad R_4 := \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : a < b\}.$$

   (b) Geben Sie jeweils eine Relation auf der Menge $\{1,2,3\}$ an, welche
      (i) reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv ist,
      (ii) reflexiv, aber weder symmetrisch noch transitiv ist.

2. (a) Sei A eine Menge und $(R_i)_{i\in I}$ eine Familie von Äquivalenzrelationen auf A. Zeigen Sie, dass $R := \bigcap_{i\in I} R_i$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Sei A eine Menge und $R \subseteq A \times A$ eine Relation. Zeigen Sie, dass es eine kleinste Äquivalenzrelation auf A gibt, die R enthält, d.h. es gibt eine Äquivalenzrelation R' auf A mit $R \subseteq R'$ und für jede andere Äquivalenzrelation R'' auf A mit $R \subseteq R''$ gilt $R' \subseteq R''$.

(c) Geben Sie die kleinste Äquivalenzrelation R auf $\mathbb{N}$ an, für welche

$$\{(1,1),(1,2),(1,3)\} \subseteq R$$

gilt.

3. (a) Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $B \subseteq N$. Zeigen Sie

$$f^{-1}\left(\complement B\right) = \complement(f^{-1}(B)).$$

(b) Sei M eine Menge und $(B_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von M. Zeigen Sie

$$\complement\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} \complement B_i \qquad \text{und} \qquad \complement\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} \complement B_i.$$

4. Sind $R \subseteq A \times B$ und $S \subseteq B \times C$ Relationen, so definiert man die Komposition $S \circ R \subseteq A \times C$ von R und S durch

$$S \circ R := \{(a,c) \in A \times C : \text{es existiert ein } b \in B \text{ mit } (a,b) \in R \text{ und } (b,c) \in S\}.$$

Zeigen Sie: Sind R und S Abbildungen, so ist auch $S \circ R$ eine Abbildung.

5. a) Für jedes $j \in \{1,2\}$ sei jeweils M_j eine Menge, $\pi_j : M_1 \times M_2 \to M_j$ die kanonische Projektion und $f_j : N \to M_j$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $f : N \to M_1 \times M_2$ gibt, so dass $\pi_1 \circ f = f_1$ und $\pi_2 \circ f = f_2$ gilt.

b) Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M, $Q := M/\!\sim$ die Quotientenmenge, $\pi : M \to Q$ die kanonische Projektion und $f : M \to N$ eine Abbildung, so dass

$$\forall\, a,b \in M : a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$$

gilt. Zeigen Sie, dass es genau eine Abbildung $g : Q \to N$ gibt, so dass $f = g \circ \pi$ gilt.

6. (a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

(i) $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

(ii) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(iii) $3 \mid n^3 - n$

gilt.

(b) Finden Sie den Fehler im Beweis des folgenden Satzes:

Satz: *Alle Pferde haben dieselbe Farbe.*

Beweis: *Da es nur endlich viele Pferde gibt, genügt es zu zeigen, dass in jeder endlichen Ansammlung von Pferden alle Pferde dieselbe Farbe haben, was per vollständiger Induktion über die Anzahl der Pferde in der Ansammlung bewiesen wird.*
Induktionsanfang: Für $n = 1$ besteht die Ansammlung nur aus einem Pferd und damit haben alle Pferde in dieser Ansammlung dieselbe Farbe.
Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte die Behauptung für n, d.h. in jeder Ansammlung von n Pferden haben alle Pferde dieselbe Farbe.
Induktionsschritt: Sei $\{P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}\}$ eine Ansammlung von $n+1$ Pferden. Nach Induktionsvoraussetzung haben alle Pferde in $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ dieselbe Farbe, insbesondere haben P_1 und P_2 dieselbe Farbe. Nach Induktionsvoraussetzung haben aber auch alle Pferde in $\{P_2, \ldots, P_{n+1}\}$ dieselbe Farbe, also die Farbe von P_2 und damit die Farbe von P_1. Daraus folgt, dass alle Pferde in $\{P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}\}$ dieselbe Farbe haben.

7. Hilberts Hotel besitzt abzählbar unendlich viele Zimmer, welche durch die natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$ nummeriert sind und die im Moment alle belegt sind. Kommt nun ein weiterer Gast, so kann dieser untergebracht werden, indem jeder bisherige Gast in das Zimmer mit der nächst höheren Nummer wechselt, d.h. der bisherige Gast aus Zimmer 1 zieht in Zimmer 2, der bisherige Gast aus Zimmer 2 zieht in Zimmer 3, usw. So hat jeder der alten Gäste weiterhin ein Zimmer und der neue Gast kann nun in das frei gewordene Zimmer 1 ziehen. Wie kann man alle Gäste unterbringen, wenn

   (a) endlich viele neue Gäste kommen,

   (b) ein Bus mit abzählbar unendlich vielen neuen Gästen kommt,

   (c) endlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen neuen Gästen kommen,

   (d) abzählbar unendlich viele Busse mit jeweils abzählbar unendlich vielen neuen Gästen kommen?