WS 14/15 - Fachdidaktik I - Übungsblatt 5 vom 1.12.14 – Abgabe 8.12.14

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die reellen Lösungen der folgenden schulüblichen Gleichungen.

a) $x^3 - 2x^2 + 5x = 0$ b) $x^4 - 5x^2 = -4$ c) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

d) $4e^{2x} + 6e^x = 4$ e) $\sin(x) \cdot \cos(x) - \cos(x) = 0$ für $0 \le x < 2\pi$ f) $\frac{2(x^2-1)\cdot e^{0{,}5x}}{x^2+1} = 0$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Schreiben Sie das Polynom $(x+3i)\cdot(x-3i)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$ in der Form $\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$ mit $a_k \in R$ für alle k.

b) Zerlegen Sie das Polynom x^3-2x^2+4x-8 , $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ in Linearfaktoren.

c) Zerlegen Sie das Polynom x^4+1 , $\mathbf{x} \in \mathbf{C}$ in Linearfaktoren.

d) Geben Sie ein Polynom mit Grad 11 an, das als einzige reelle Nullstelle $a = 7$ hat.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zum Erraten einer Nullstelle eines Polynoms nützt manchmal der Satz*:
Sei $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ ein Polynom mit <u>ganzzahligen</u> Koeffizienten a_i. Dann gilt:
Für jede <u>rationale</u> Nullstelle $x_0 = \frac{p}{q}$ (p aus Z; q aus N) des Polynoms ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n, sofern der Bruch $\frac{p}{q}$ durchgekürzt ist.

a) Formulieren Sie den Satz für den Spezialfall, dass das Polynom nur ganzzahlige Koeffizienten hat und $a_n = 1$ ist. Wenden Sie diesen Spezialfall auf die folgenden Polynome dahingehend an, ob mit seiner Hilfe eine Nullstelle gefunden werden kann:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2 \quad ; \quad g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

b) Bestimmen Sie mit * alle Nullstellen des Polynoms $h(x) = x^3 - 10{,}5x^2 + 30x - 12{,}5$.

c) Beweisen Sie den Satz*.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Die Definition einer zweifachen Nullstelle für ein Polynom p lautet so:
Definition: a heißt zweifache Nullstelle von p , wenn gilt:
Es gibt ein Polynom g mit $p(x) = (x-a)^2 \cdot g(x)$ mit $g(a) \neq 0$.
Beweisen Sie den **Satz**:
a ist genau dann zweifache Nullstelle von p, wenn für die Polynomfunktion $p(a) = p'(a) = 0$ und $p''(a) \neq 0$ gilt.
Hinweis: Es ist vorausgesetzt, dass Polynomfunktionen beliebig oft differenzierbar sind.
Verwenden Sie die Ableitungsregeln.