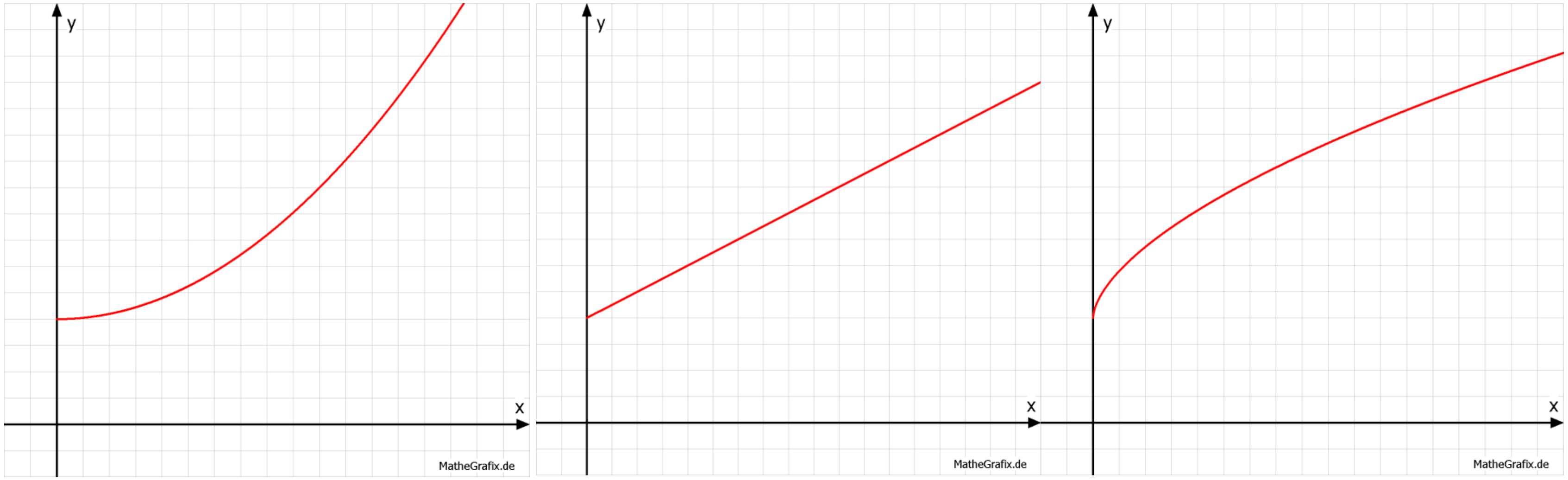
Die Ableitung - Anwendung

Die Funktion f: $x \rightarrow f(x)$ ordnet einer Wohnfläche x die Herstellungskosten f(x) zu   (x in m^2 ; f(x) in €).



Die Ableitung - Anwendung

Was bedeutet $f'(80) = 1200$ in diesem Kontext?

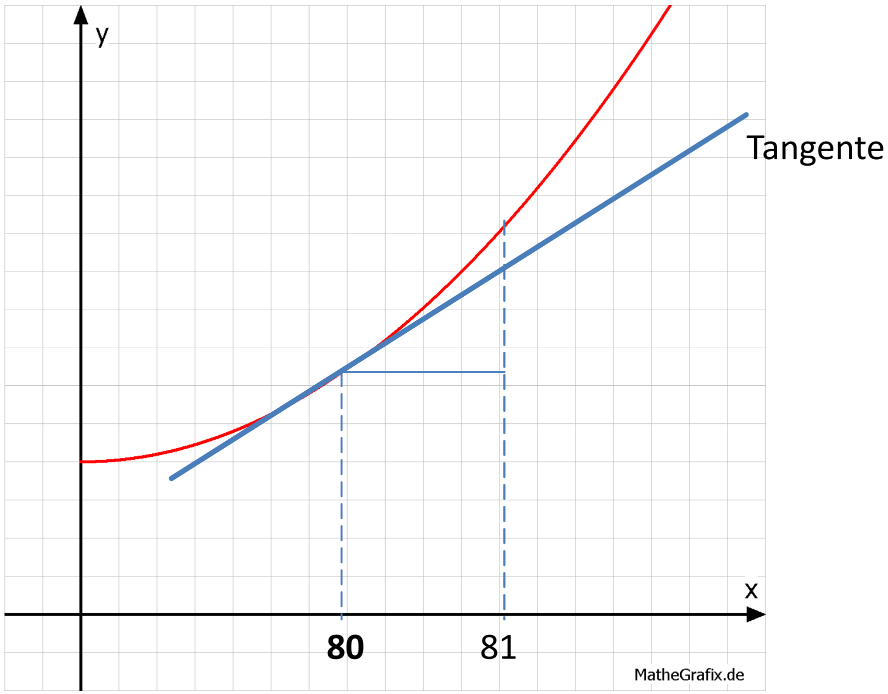
A. 80 m² Wohnfläche kosten 1200 €

B. 81 m² Wohnfläche kosten 1200 € mehr als 80 m²

C. 80 m² Wohnfläche kosten im Schnitt 1200 €/m²

Die Ableitung - Anwendung

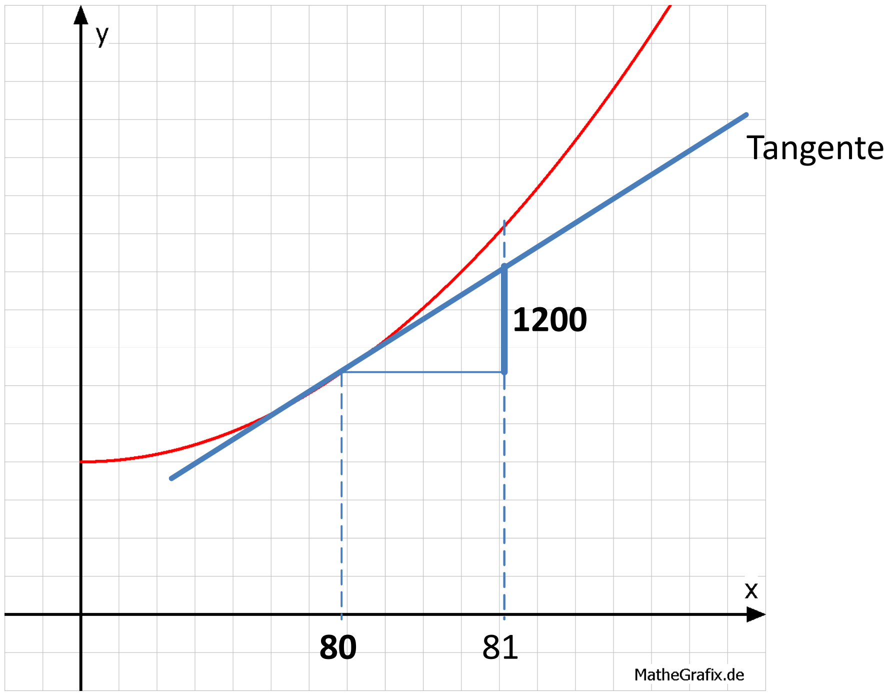
Was bedeutet f´(80) = 1200 in diesem Kontext?



Wo ist da 1200 veranschaulicht?

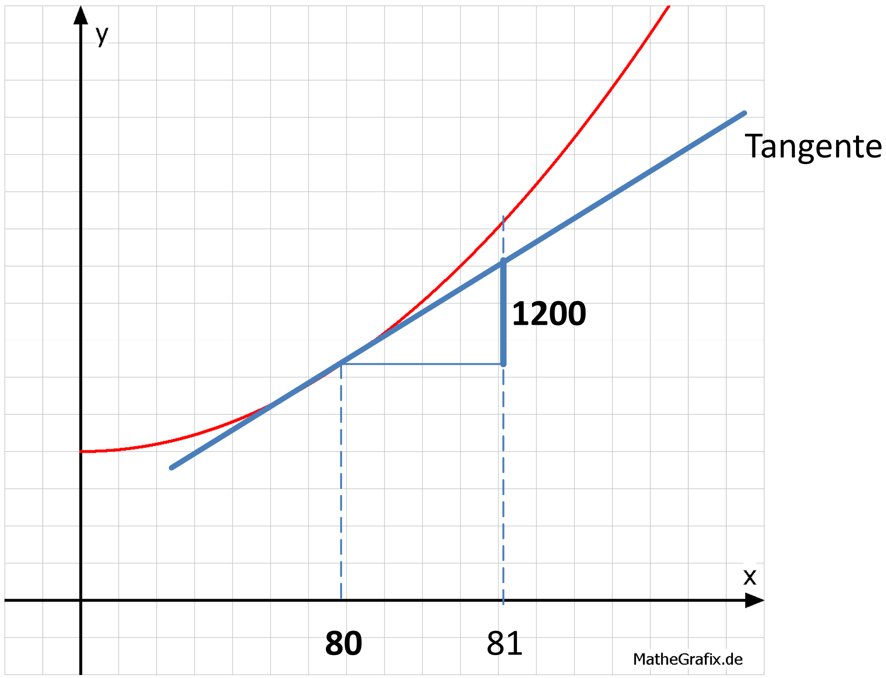
Die Ableitung - Anwendung

Was bedeutet f´(80) = 1200 in diesem Kontext?



Die Ableitung - Anwendung

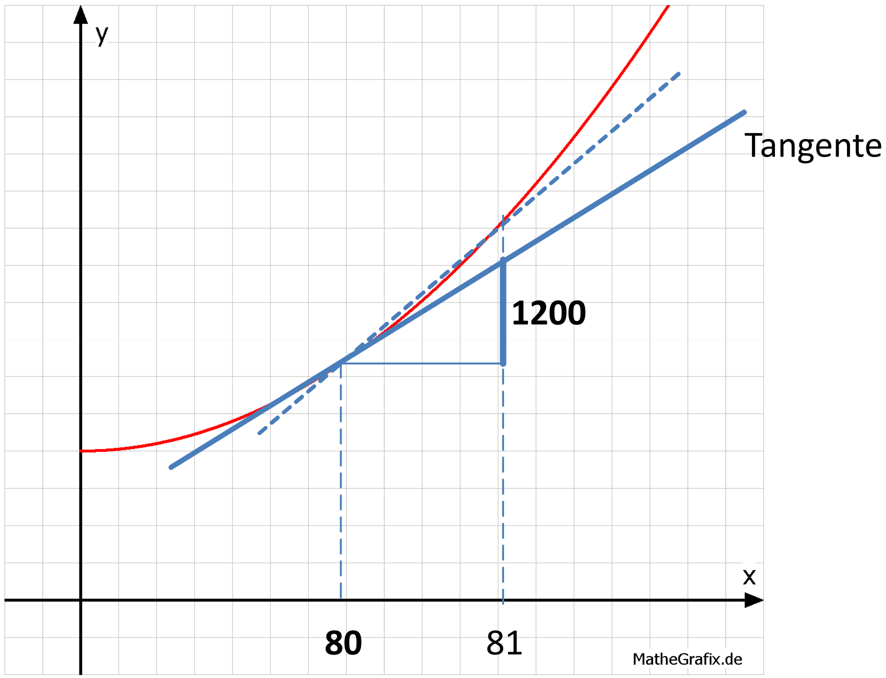
Wenn der Kostenanstieg so weitergehen **würde** wie bei x = 80, dann **würden** bei 81 m² die Herstellungskosten 1200 € höher sein.



Die Ableitung - Anwendung

Die Ableitung f´(80) = 1200 ist die **lokale Änderungsrate** an der Stelle x = 80.

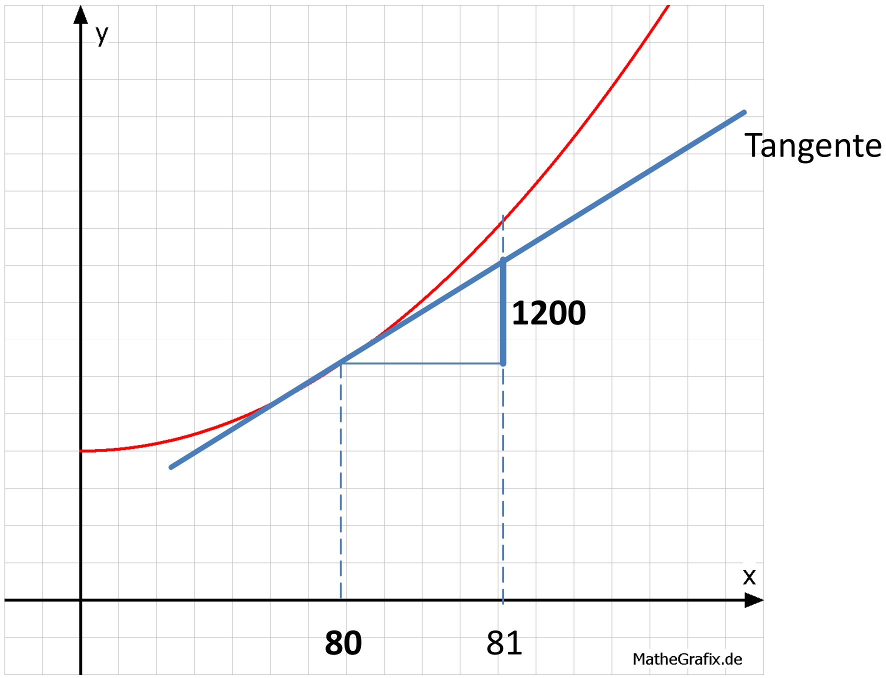
Unterscheide davon die **mittlere** Änderungsrate im Intervall [80; 81]



Die Ableitung - Anwendung

Ist f(x) ein Geldbetrag, spricht man statt von der **lokalen Änderungsrate** oft von **Grenzkosten**:

Die Grenzkosten betragen bei 80 m² 1200 €.



Die Ableitung - Anwendung

Die Funktion V: r → V(r) ordnet einem Radius r das Volumen V einer Kugel zu (r in m ; V(r) in m³).

Es gilt $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Was bedeutet in diesem Kontext $V'(r)$?

Nr.10- 12.01.2015

Ableitungsregeln

Ableitung und Ableitungsregeln

Fachlogische Struktur:

Definition der Ableitung

Satz: (Potenzregel)
Ableitung der Grundfunktionen $f(x) = x^n$
(n=1; 2; 3; . . .) und $f(x) = k$ (k ist konstant)

Satz: Ableitung der Grundfunktionen
$f(x) = x^{-1}$; $f(x) = x^{-2}$

Satz: Ableitung der Grundfunktionen
$f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$.

Satz: Ableitung der zusammengesetzten Funktionen:
$f(x) = k \cdot g(x)$ (Faktorregel)
$f(x) = g(x) + h(x)$ (Summenregel)

Klasse 10

Ableitungsregeln

Kursstufe

Definition der Ableitung

Satz: Ableitung der <u>Grundfunktion</u>

$f(x) = e^x$

Satz: Ableitung der <u>zusammengesetzten Funktionen:</u>

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$ (Produktregel)

$f(x) = g(h(x))$ (Kettenregel)

Bemerkung: Die ln-Funktion wird als Funktion nicht abgeleitet und untersucht. Der Sch. benötigt lediglich die Stammfunktion von 1/x. Das passt am besten zur Integralrechnung.

Beweis: Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Differenzenquotient $\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$

$$= \frac{x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot h^3 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot h^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \dots \quad + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot h^{n-2} + h^{n-1}$$

Ableitung: f´(x) = $\lim\limits_{h \to 0} \left[\binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h + \binom{n}{3} \cdot x^{n-3} \cdot h^2 + \dots \quad + \binom{n}{n-1} \cdot x^1 \cdot h^{n-2} + h^{n-1} \right]$

$$= \lim_{h \to 0} \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + \lim_{h \to 0} \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h + \dots \quad + \lim_{h \to 0} h^{n-1}$$

$$= \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} + 0 + \dots + 0$$

= n$\cdot$ x^{n-1}

Beweis: Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Vorwissen:

Definition der Ableitung mit h-Methode

Binomischer Lehrsatz (muss bereitgestellt werden)

Grenzwertsätze (fachliche Reduzierung)

Gibt es eine zentrale Idee?

Kann sie der Schüler erkennen? Wie?

Spezifische Schwierigkeiten:

„Einfache Fälle“ wie x° und x^1 zunächst weglassen

Koeffizienten nicht allgemein schreiben

Beweis: Potenzregel $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

Unterrichtliches Vorgehen:

1. Konkrete Bsp. ableiten: x^2 , x^3, usw.
   Erfahrungen sammeln

2. Vermutung formulieren, zunächst in Worten
   Aha, da gibt es einen Zusammenhang und ich kann diesen formulieren

3. Sieht man an den Bsp. warum das immer funktionieren muss?
   Die Regel ***muss*** *für eine beliebige Hochzahl n gelten, das sieht man an den Beispielen.*

4. Ein **formaler** Beweis ist nur der allerletzte Schritt.

Beweis: Summenregel und Faktorregel

Gegeben Funktionen g und h und k aus R.

1. Faktorregel: Für $f(x) = k \cdot g(x)$ gilt $f'(x) = k \cdot g'(x)$

2. Summenregel:
   Für $f(x) = g(x) + h(x)$ gilt $f'(x) = g'(x) + h'(x)$