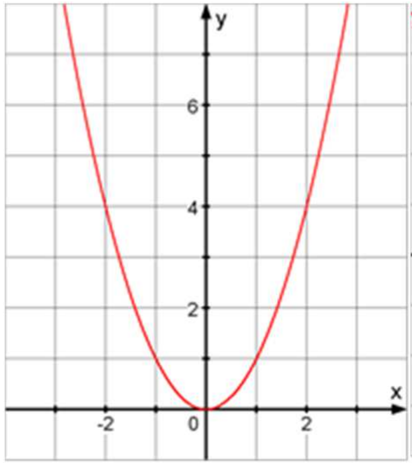
Lokales Ordnen

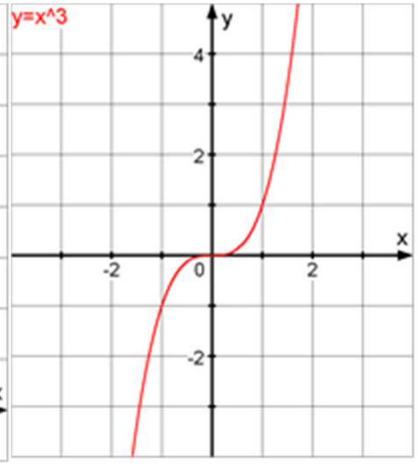
Didaktischer Fachbegriff für:
In einem begrenzten Rahmen („lokal“) wird neben den inhaltlichen Lernzielen ein übergeordnetes Lernziel verfolgt:

Der Sch. soll die deduktive sachlogische Struktur der Mathematik in begrenztem Rahmen erfahren und verstehen.

Beispiel Symmetrie

1. Schritt:
   Phänomene zeigen;
   Grundvorstellungen
   entwickeln





Frage:
Wie erkennt man Achsensymmetrie eines Graphen?

Schülerantwort auf diesem Entwicklungsstand?

Symmetrie

Der Sch. zeigt beispielhaft Graphen und sagt:

- das sind symmetrische Graphen und

- das sind nicht symmetrische Graphen

Vielleicht zeigt er noch: Wenn man das Geodreieck „so“ anlegt, kann man das erkennen.

Symmetrie

2. Schritt: Mathematisieren, Formalisieren

D.h. man beschreibt den „Knackpunkt“ dessen, was Symmetrie eines Graphen ausmacht, in einem bestimmten Formalismus (hier Funktion, nicht Geometrie), und zwar unmissverständlich.

Definition: Ein Graph einer Funktion f heißt achsensysmmetrisch zur y-Achse, falls $f(x) = f(-x)$ für alle x aus D gilt.

Hat sich die Antwort auf die Frage geändert?
Was bedeutet Achsensymmetrie eines Graphen?

Symmetrie

Die Definition ist ab jetzt die **Referenz** für Symmetrie.

Das ist gibt es in keinem anderen Schulfach:

- Eine Begriffsfestlegung in solcher Prägnanz
- Jede Meinung zu Symmetrie kann als wahr bzw. falsch klassifiziert werden.

(Übrigens: Es auch kreative Definitionen)

Symmetrie

3.Schritt: Kriterien für Symmetrie

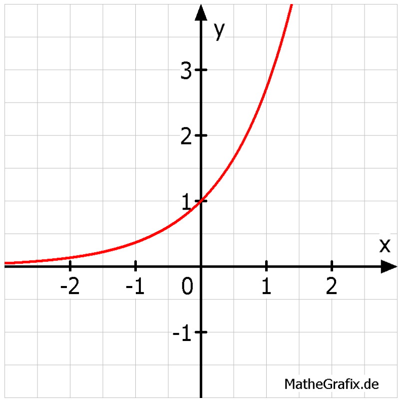
Satz: Sei f ganzrational. Dann gilt:
Wenn alle Hochzahlen zu x gerade sind, dann ist der Graph von f symmetrisch zur y-Achse.

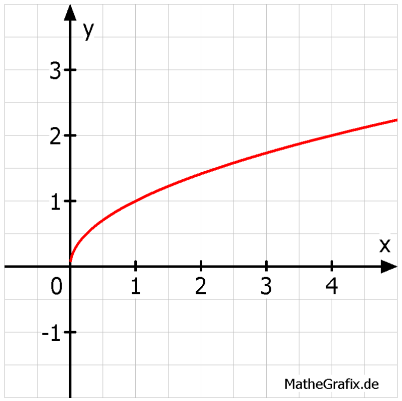
- Sätze muss man beweisen
- Bei Definitionen gibt es nichts zu beweisen, aber vorher muss das zu Definierende „da“ sein.

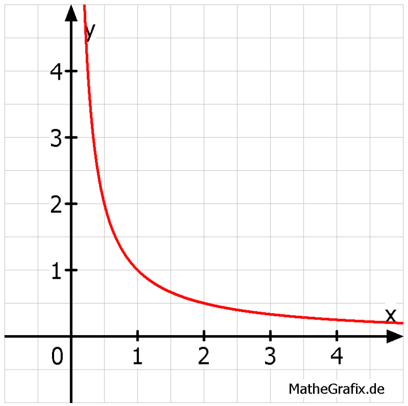
Hat sich die Antwort auf die Frage geändert?
Was bedeutet Achsensymmetrie eines Graphen?

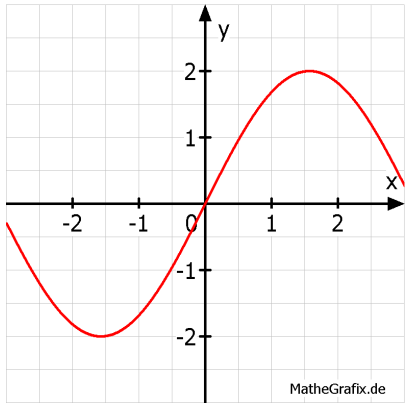
Monotonie von Funktionen

1. Schritt: <u>Phänomene</u> zeigen; <u>Grundvorstellungen</u> entwickeln









Frage:

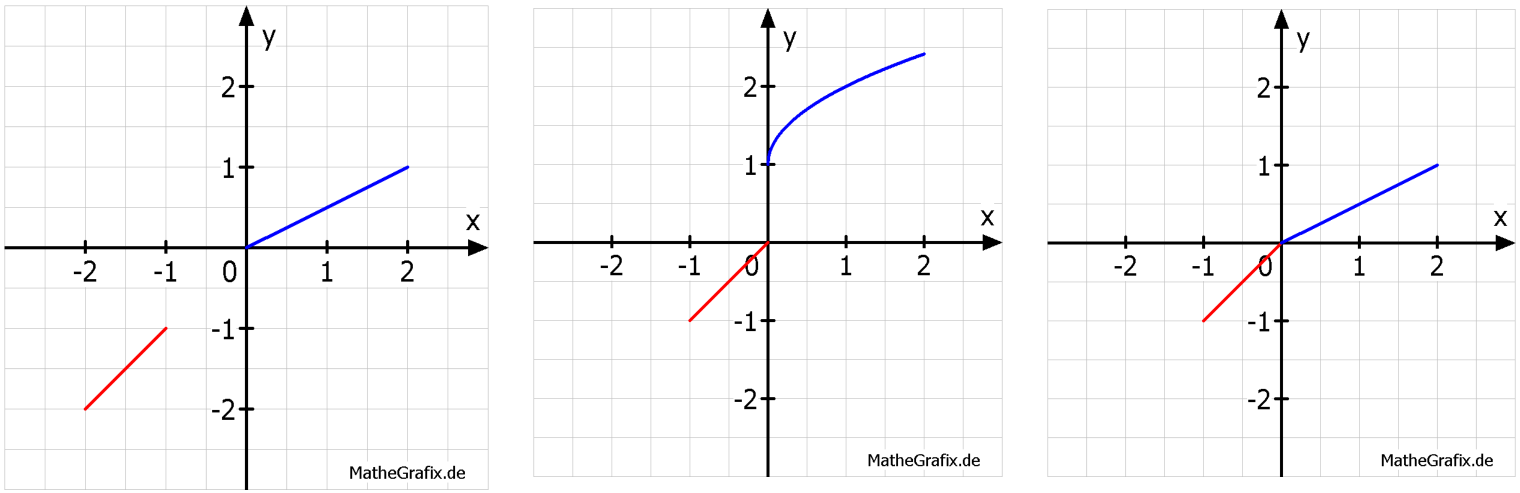
Wie erkennt man „streng monoton steigend“?

Schülerantwort auf diesem Entwicklungsstand?

Monotonie von Funktionen

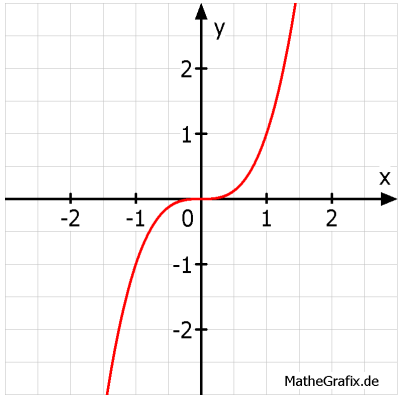
2. Schritt: Mathematisieren, Formalisieren

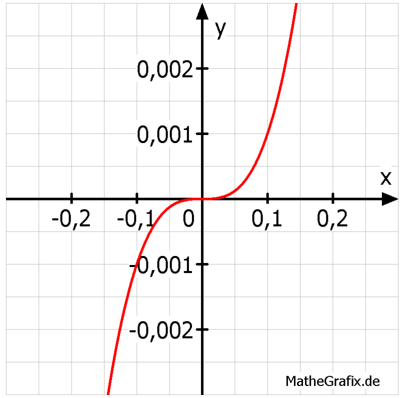
Definition: Sei f auf D definiert.
f heißt streng monoton steigend auf D, wenn für alle a,b aus D mit a < b gilt f(a) < f(b).



Monotonie

Ist $f(x) = x^3$ streng monoton steigend? Ja!





$f(0,1) = 0,001$

$f(0,01) = 0,000\ 001$

$f(0,001) = 0,000\ 000\ 001$

Beweis:

1.Fall: $0 < u < v$. Zu zeigen: $u^3 < v^3$.

Setze: $v = u + d$ mit $d>0$.

$(u+d)^3-u^3= u^3+3u^2d +3ud^2+d^3-u^3 = 3u^2d +3ud^2+d^3 >0$

2.Fall: $u < v < 0$. Dann $0 < -v < -u$. Zu zeigen:

Mit (1) $(-v)^3 < (-u)^3$, also $-v^3 < -u^3$, also $u^3 < v^3$.

(ii) $u < 0 < v$. Dann $u^3 < 0 < v^3$.

Monotonie

3. Schritt Kriterien.

Satz: Sei f auf einem Intervall I differenzierbar.
Wenn $f'(x) > 0$ für alle x aus I, dann ist f auf I streng monoton steigend.

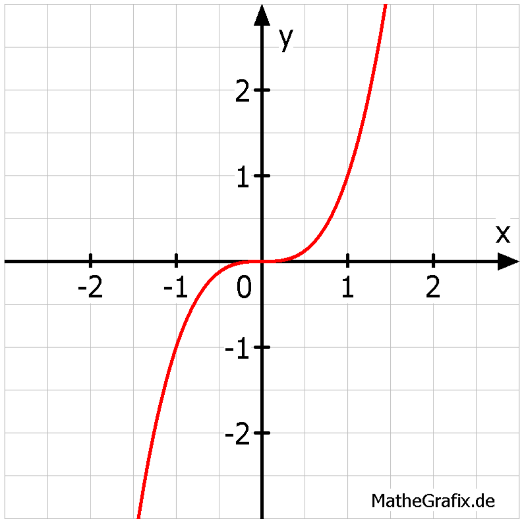
Fragen:

a) Muss f auf einem Intervall definiert sein?

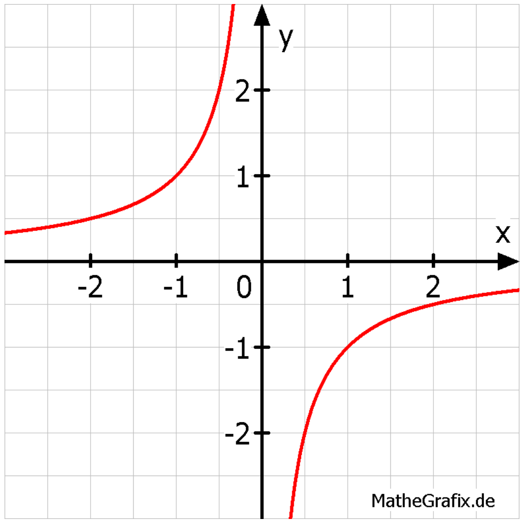
b) Gilt auch die Umkehrung?

Monotonie

$f(x) = x^3$



$g(x) = -\frac{1}{x}$



Monotonie

Beweis des Satzes:

Sei $f'(x) > 0$ für alle x aus I und $a,b \in I$.

Zu zeigen: Wenn $a < b$ dann $f(a) < f(b)$.

Mittelwertsatz: Es gibt eine Stelle $z \in I$ mit $f'(z) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Da $f'(z) > 0$ und $a < b$ folgt: $f(a) < f(b)$.

(Nicht für die Schule)

Extremwerte

1.Schritt: Motivation – Um was soll es gehen?

„Bildchen“

2. Schritt:

Definition: f sei auf I definiert. Dann hat f an der Stelle z ein lokales Maximum genau dann, wenn in einer Umgebung U von z gilt:

Für alle x aus U ist $f(x) \leq f(z)$

Frage: Was ist mit $f(x) = 2$?

Extremwerte

3.Kriterien.

Satz 1: Sei f auf I differenzierbar.
Wenn f an der Stelle z ein lokales Maximum hat, dann gilt $f'(z) = 0$.

$f'(z) = 0$ heißt auch Notwendige Bedingung

Die Umkehrung gilt nicht.
Gegenbeispiel $f(x) = x^3$.

Extremwerte

3.Kriterien.

Satz 2: Sei f auf I differenzierbar und $z \in I$.

Wenn gilt: $f'(z) = 0$ und

Es gibt eine Umgebung von z mit ($x \in U$)

Für [$x<z$ ist $f'(x) < 0$ und für $x<z$ ist $f'(x) > 0$],*

dann hat f an der Stelle z ein lokales Maximum.

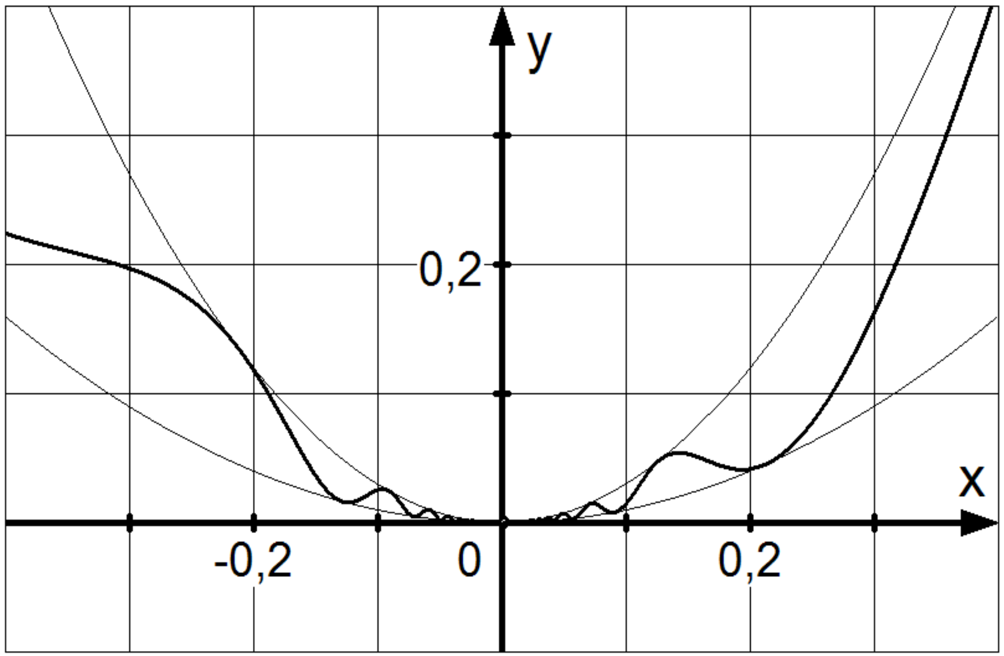
**[f´ hat an der Stelle z einen VZW von – nach +]*
Hinreichende Bedingung 1

Gilt die Umkehrung?

Extremwerte

Nein.

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$



Extremwerte

3.Kriterien.

Satz 3: Sei f auf I zweimal differenzierbar und $z\in I$.
Wenn gilt: $f'(z) = 0$ und $f''(z) < 0$*,
dann hat f an der Stelle z ein lokales Maximum.
**Hinreichende Bedingung 2*

Gilt die Umkehrung? Nein.
Gegenbeispiel: $f(x) = x^4$ (für Minimum)

Sind die Kriterien gleichwertig? Nein.
Das Minimum von $f(x) = x^4$ wird von Satz 1 erfasst, nicht von Satz 2.

Dasselbe Spiel

Wendepunkte

Phänomen - Definition - Kriterien

Integral

Phänomen - Definition - Kriterien

Flächeninhalt *Hauptsatz*