Stetigkeit

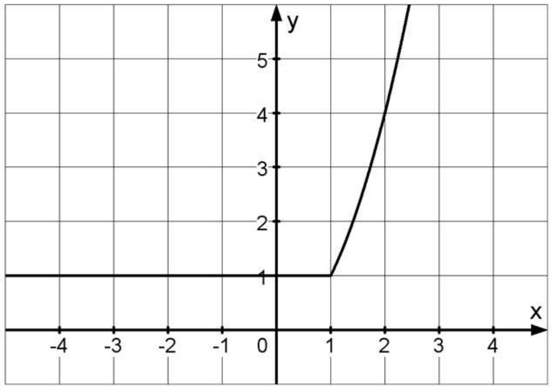
- Im Bildungsplan bis 2004 verpflichtend, jetzt nicht mehr.
- Soll Stetigkeit in der Schule behandelt werden?

Warum?

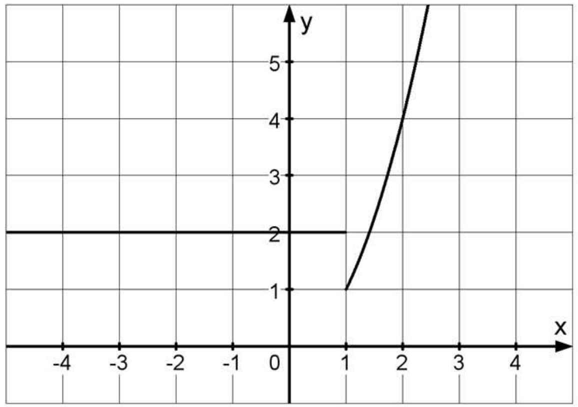
1. Das ist ein ganz einfach zu verstehender Begriff, der sich auch gut veranschaulichen lässt.
   Stimmt das?
2. Man braucht die Stetigkeit in der Analysis, das ist unabdingbar.
   Stimmt das für die Schule?

Ist Stetigkeit ein anschaulicher Begriff?

$$(1)\ f(x)=\begin{cases}1, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases};\ D=\mathbb{R}$$



$$(2)\ f(x)=\begin{cases}2, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases};\ D=\mathbb{R}$$



Stetig an der Stelle a = 1?

Stetig auf D ?

Differenzierbar an der Stelle a = 1 ?

Differenzierbar auf D ?

Definition für die Schule

Definition: Die Funktion f sei auf einem Intervall J definiert.
f heißt **stetig** an einer Stelle a aus J genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

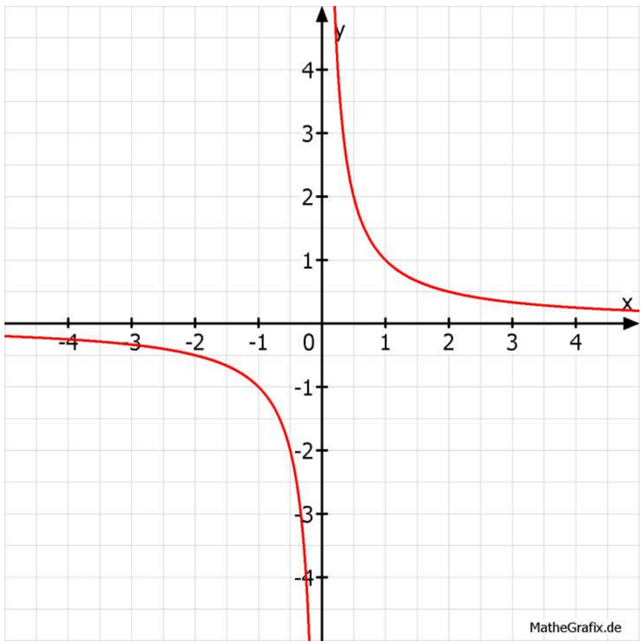
Definition: Die Funktion f sei auf einem Intervall J definiert.
f heißt **stetig** an einer Stelle a aus J genau dann, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ mit

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \text{ aus } J \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Definition für die Schule

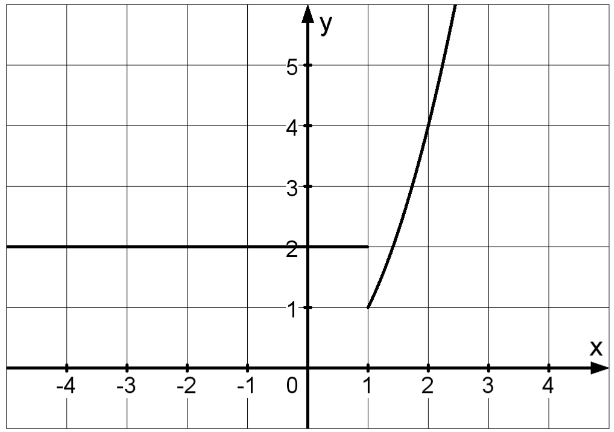
Schüler:

Im Buch steht, dass die Funktion f mit f(x) = 1/x stetig ist. Sie sagten, das würde bedeuten, dass man den Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Das passt doch nicht zusammen!



Definitionsbereich kein Intervall

3) $f(x)=\begin{cases} 2, & x<1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$; $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$



Stetig an der Stelle a = 1?

Stetig auf D ?

Definition allgemein

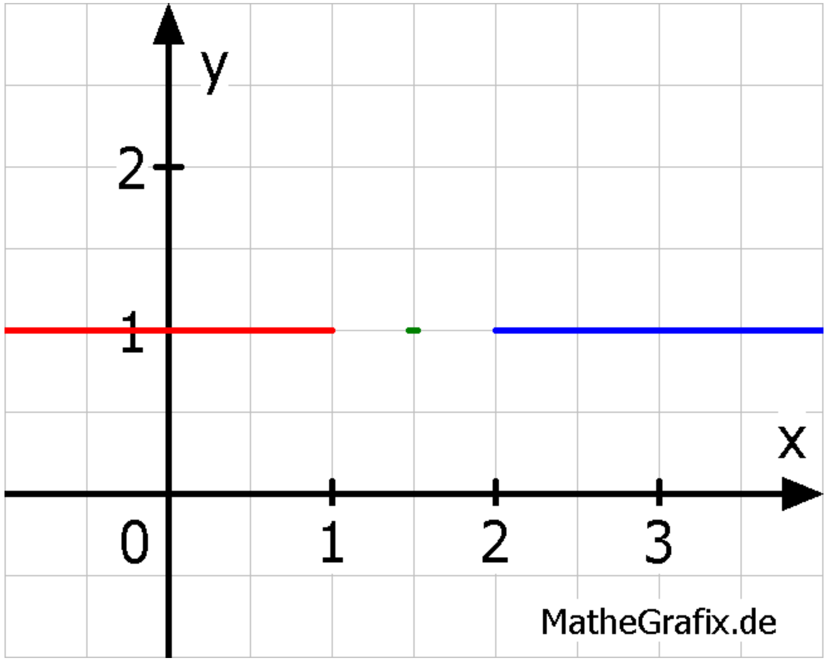
Definition: Die Funktion f sei auf D definiert, a aus D und a ein Häufungspunkt von D. f heißt **stetig** an der Stelle genau dann, wenn gilt: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

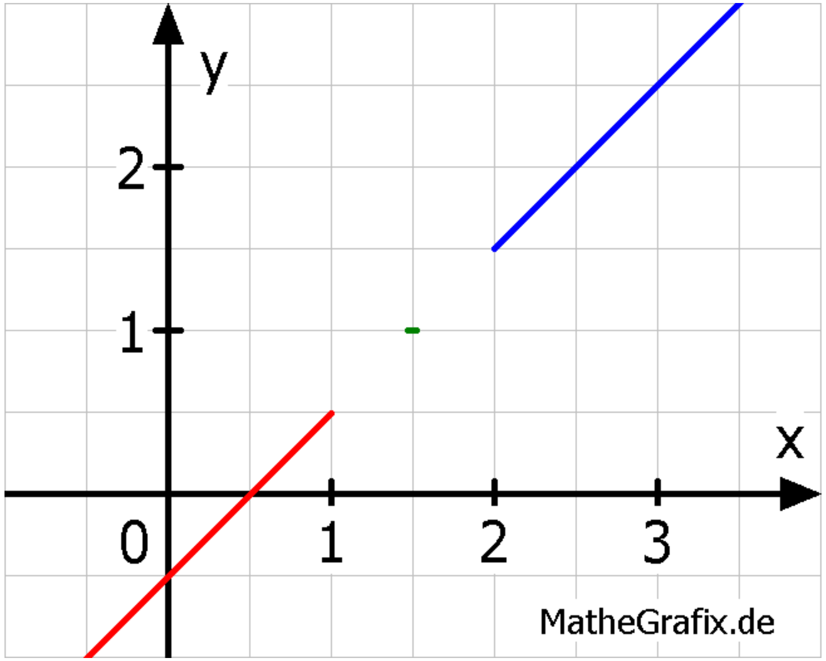
Definition: Die Funktion f sei auf D definiert, a aus D und a ein Häufungspunkt von D. f heißt **stetig** an der Stelle a genau dann, wenn gilt:
Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ mit

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \text{ aus } D \text{ mit } |x - a| < \delta.$$

Warum Häufungspunkt?

Stetig bei a = 1,5 ?

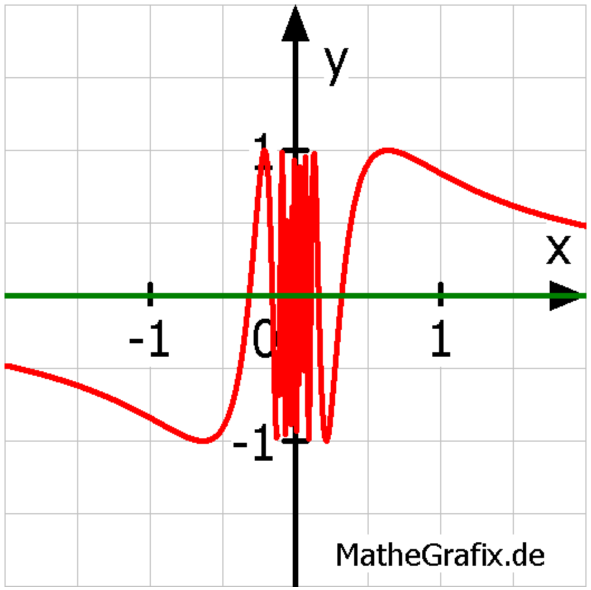


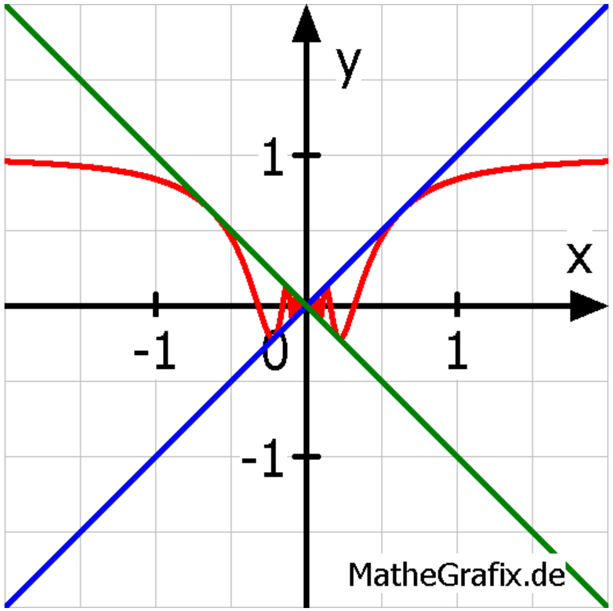


„Pathologische" Fälle

$$f(x)=\begin{cases}\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases};\ D=R$$

$$f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin(\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases},\ D=R$$





Stetigkeit: Warum?

Satz: (Zwischenwertsatz)
Ist f auf [a;b] stetig, dann nimmt f(x) jeden Wert zwischen f(a) und f(b) an.

Spezialfall: **Nullstellensatz**
Ist f auf [a;b] stetig, f(a) < 0 und f(b) > 0, dann hat f in (a;b) mindestens eine Nullstelle.

Diesen Satz verwendet man in der Schule dauernd. Das führt dazu, dass sehr oft die Voraussetzung gebraucht wird:
Sei f stetig auf [a;b] und . . . .

Stetigkeit: Weitere Existenzsätze

Satz: Ist f auf [a;b] stetig, dann ist die Wertemenge W von f auch ein abgeschlossenes Intervall.
(evtl. eine einzige Zahl)
D.h. es existieren u,v aus [a;b] mit W = [f(u); f(v)]

Folgerungen:
Satz: Ist f auf [a;b] stetig, dann ist die Wertemenge W von f beschränkt (nach oben und nach unten).

Satz: Ist f auf [a;b] stetig, dann hat die Wertemenge von f ein Maximum und ein Minimum.

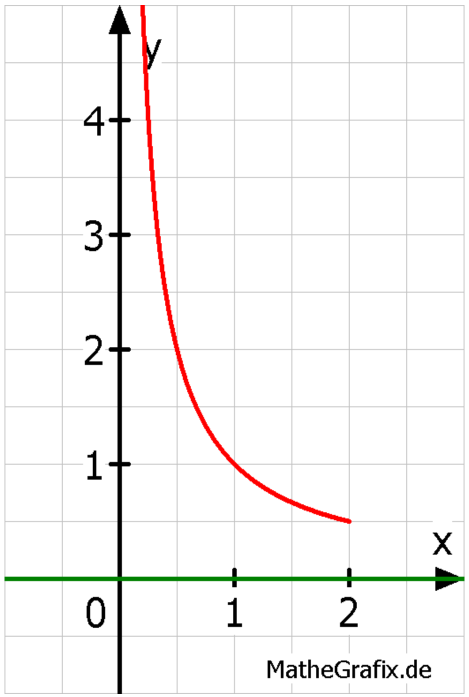
Beispiele

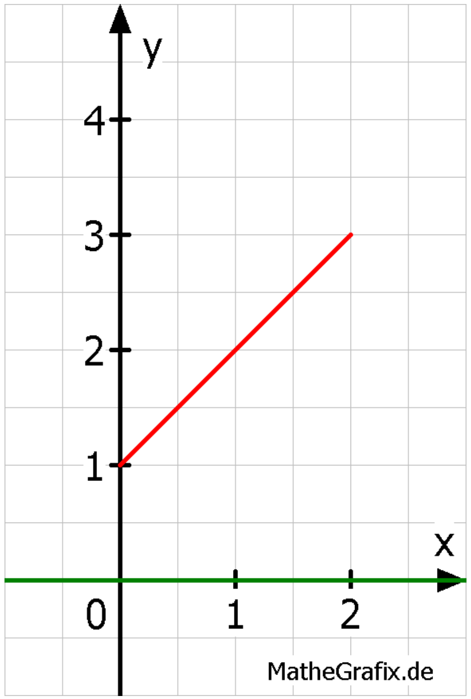
$f(x) = \frac{1}{x}$
D = (0; 2]

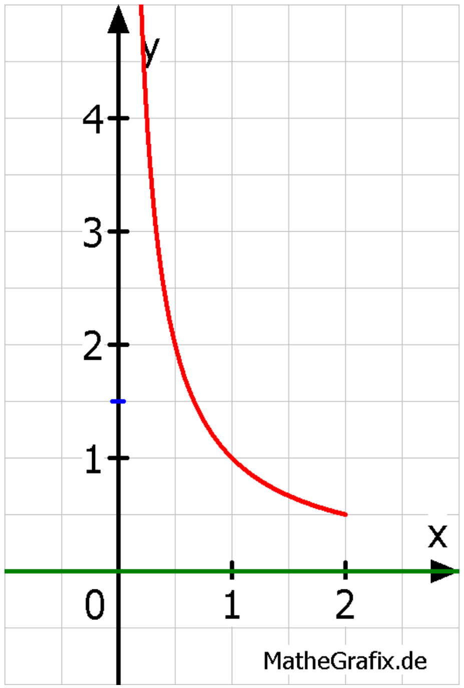
$g(x) = x+1$
D = (0; 2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; x \in (0;2] \\ 1{,}5 & ; x = 0 \end{cases}$$

D=[a;b] ? Stetig? Beschränkt? Maximum/Minimum?





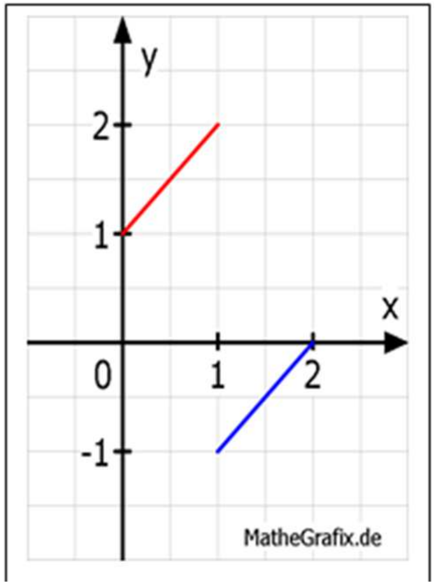


Nr.12- 26.01.2015

Stetigkeit und „Zwischeneigenschaft“

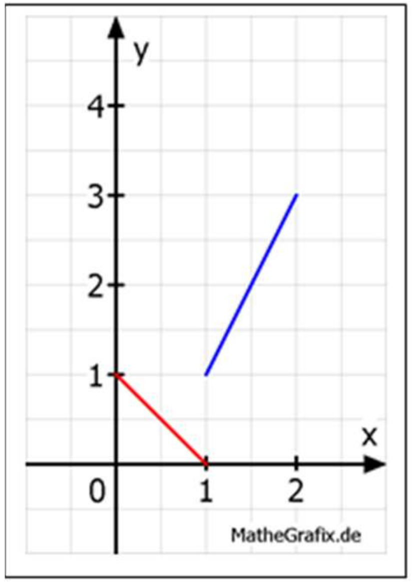
A. f ist auf [0;2] stetig.

B. Zwischenwerteigenschaft: f(x) nimmt jeden Wert zwischen f(0) und f(2) an.



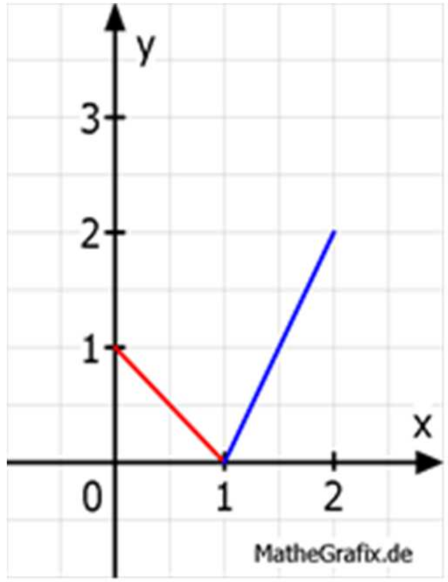
A falsch; B falsch

$A \Leftrightarrow B$



A falsch; B wahr

$A \Rightarrow B \quad \cancel{A \Leftarrow B}$



A wahr; B wahr

$A \Leftrightarrow B$

Zwischenwerteigenschaft und Stetigkeit

Die Zwischenwerteigenschaft auf [a; b] ist nicht äquivalent zur Stetigkeit auf [a; b].

Stetigkeit auf [a; b] ist stärker.

Zwischenwerteigenschaft

Ein Wanderer geht am Samstag zwischen 8 Uhr und 14 Uhr von A nach B.

Am Sonntag geht er zwischen 8 Uhr und 14 Uhr von B nach A.

A Samstag B

8 Uhr 14 Uhr

A Sonntag B

14 Uhr 8 Uhr

Es gibt einen Ort, an dem der Wanderer an beiden Tagen zur gleichen Zeit war.

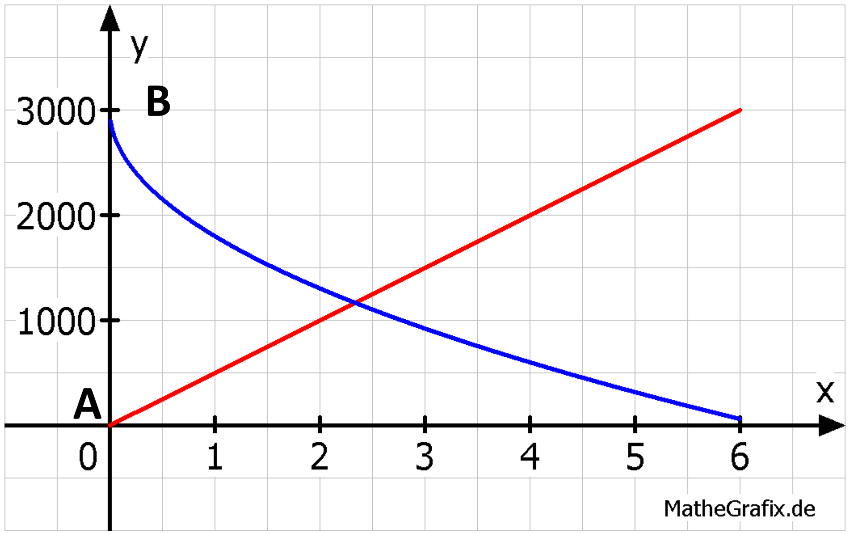
Zwischenwerteigenschaft

Samstag | Sonntag

f(t) = Abstand von A am Sa | g(t) = Abstand von A am So

t in Stunden; f(t) und g(t) in Meter

t = 0 bei 8 Uhr ; $0 \leq t \leq 6$



Definiere: $d(t) = f(t) - g(t)$

Es ist:

$d(0) < 0$ und $d(6) > 0$

Zwischenwertsatz:

Es existiert t_0 mit $0 < t_0 < 6$

und $d(t_0) = 0$, also $f(t_0) = g(t_0)$.

Zwischenwerteigenschaft

Auf jedem Längenkreis um die Erde gibt es zwei gegenüberliegende Punkte mit der derselben Höhe überNormal-Null.