Beweisen in der Schule

Bildungsplan 2004 (Zitat:)

Begründen

Elementare Regeln und Gesetze der Logik kennen und anwenden

Begründungstypen und Beweismethoden der Mathematik kennen, gezielt auswählen und anwenden

Beweisen in der Schule

Satz: Wenn $6|n$, dann $3|n$.

Beweis:

$6|n$, also $n = 6\cdot k$; Definition „teilt“

also $n = 2\cdot 3\cdot k$; elemen. Rechnen

also $n = 3\cdot(2\cdot k)$; Rechenregeln

also $n = 3\cdot j$ mit $j=2k$

also $3|n$; Definition „teilt“

Direkter Beweis

Aussagenlogische Analyse:

$[A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$

A	B	A→B	A∧(A→B)	A∧(A→B)→B
W	W	W	W	W
W	F	F	F	W
F	W	W	F	W
F	F	W	F	W

Tautologie

Direkter Beweis

Aussagenlogische Analyse:

$[A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$

Mehrfache Hintereinanderausführung

$[A \wedge (A \rightarrow B)] \rightarrow B$

$[B \wedge (B \rightarrow C)] \rightarrow C$

$[C \wedge (C \rightarrow D)] \rightarrow D$ usw.

Warum habe ich bewiesen? Wenn $6|n$, dann $3|n$.

- Weil Sie es vorher nicht wussten?
- Weil man in Mathe alles beweist?
- Weil ich den Satz später brauche?

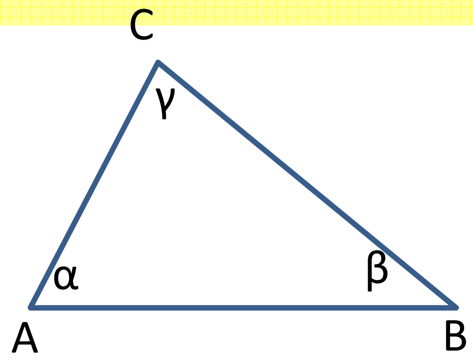
Warum habe ich bewiesen? Wenn $6|n$, dann $3|n$.

- Weil der Beweis ein geeignetes Beispiel für einen direkten Beweis ist.

Hier geeignet weil:

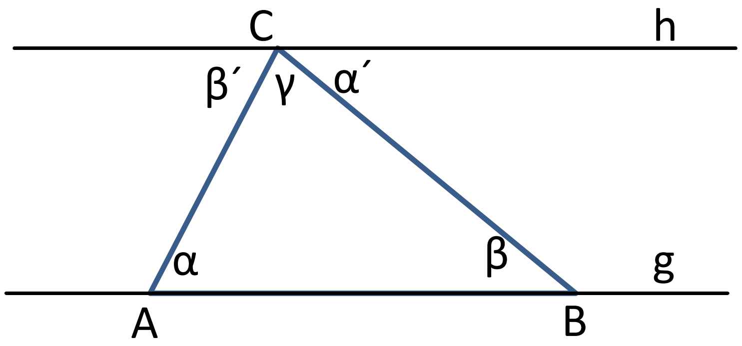
- *Kein Vorwissen außer Aussagenlogik*
- *Keine spezifischen Schwierigkeiten*
- *Keine geniale Idee*
- *Einfache Begründungsbasis*

Beispiel aus Klasse 7



Beweise: α+β+γ = 180°

1. Zeichne g||h ; *Idee*
2. β´= α ; *Wech.W-Satz*
3. α´= β ; *Wech.W-Satz*
4. β´+γ+α´= 180°;
   Neben-W-Satz
5. α+β+γ = 180°



Direkt geht nicht? Was tun?

A: Fred hat am 1.11.11. in Stuttgart einen Mord verübt

B: Fred war am 1.1.11 in Stuttgart

Gerichtsfeste Logik:

1. A→B ist wahr
2. ¬B→¬ A ist wahr

A	B	A→B	¬A	¬B	¬B→¬A
W	W	W	F	F	W
W	F	F	F	W	F
F	W	W	W	F	W
F	F	W	W	W	W

Kontraposition

1. $A \rightarrow B$ und $\neg B \rightarrow \neg A$ sind logisch äquivalent

2. $\neg B \rightarrow \neg A$ heißt Kontraposition zu $A \rightarrow B$

3. Statt $A \rightarrow B$ zu beweisen ist es gleichwertig $\neg B \rightarrow \neg A$ zu beweisen.

Beachte: Umkehrung von $A \rightarrow B$ ist $B \rightarrow A$.
Das ist nicht die Kontraposition

Kontraposition

Zeige: Wenn n^2 gerade, dann n gerade.

Beweis mit Kontraposition. Zu zeigen:

Wenn n <u>un</u>gerade, dann n^2 <u>un</u>gerade.

n ungerade, also $n = 2 \cdot k+1$; Def. ungerade

also $n^2 = 4k^2+4k+1$; Algebra

also $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$; Algebra

also $n^2 = 2 \cdot j+1$ mit $j=2k^2+2k$

also n^2 ungerade

Beweis durch Widerspruch

Ein historisches Beispiel: Galilei ca.1600

Körper K: Masse M   Körper k: Masse m<M

Galilei möchte zeigen:

A: K fällt nicht schneller als k

Ich nehme an, A ist falsch, also

¬A: K fällt schneller als k

Beweis durch Widerspruch

Ein historisches Beispiel: Galilei ca.1600

Körper K: Masse M   Körper k: m<M

Galilei möchte zeigen:

A: K fällt nicht schneller als k

Galilei nimmt an, A ist falsch:

¬A: K fällt schneller als k

Und erhält einen Widerspruch.

Beweis durch Widerspruch

Aussagenlogische Form:

$[\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)] \rightarrow A$ ist eine Tautologie*

Aus $\neg A$ folgt Kontradiktion. Es folgt $\neg\neg A = A$

* Beweis mit Wahrheitstafel

In der Schule?

Zeige A: $\sqrt{2}$ kann man nicht als Bruch a/b schreiben (a,b aus Z)

Beweis mit Widerspruch

Annahme $\neg$ A: $\sqrt{2} = a/b$

dann $2 = a^2/b^2$

dann $2b^2 = a^2$

Primfaktor 2

in ungerader Anzahl in gerader Anzahl

Widerspruch!

Didaktische Bewertung

- Vorwissen: Primfaktorzerlegung
- Logische Strategie schwer
- „Unterprozedur“ des Widerspruchs lenkt ab von „Oberprozedur“ ab.

In der Schule

- Unterscheidung: Satz – Definition
- Unterscheidung: Satz - Kehrsatz
- Voraussetzung – Folgerung identifizieren
- Aussage eines Satzes verstehen

In der Schule

- Beweis mit Beispiel bzw. Gegenbeispiel
- Direkte Beweise ab Klasse 7
- Stellenweise: Kontraposition
  Beweis mit Widerspruch

In der Schule

- Beweis mit Beispiel bzw. Gegenbeispiel
- Direkte Beweise ab Klasse 7
- Stellenweise: Kontraposition
  Beweis mit Widerspruch

Zusatz 1

Zum Bildungswert der Mathematik an der Schule am Beispiel der deduktiven (logischen) Schulung.

Zusatz 2

Was leistet ein Beweis?

Mathematischer Satz

Wahr in der Mathematik	Wahr in Wirklichkeit?

Bsp: Winkelsumme im Dreieck

Zusatz 2

Einstein: "Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit".