Reelle Zahlen

Natürliche Zahlen N Grundschule

Ganze Zahlen Z und rationale Zahlen Q
Bis Ende Klassenstufe 6

Reelle Zahlen R bis Ende Klassenstufe 8

Zahlbereichserweiterungen

N→Z	Z→Q	Q→R
Kl.5	Kl.6	Kl.8

oder

N→Q+	Q+→Q	Q→R
Kl.5	Kl.6	Kl.8

Warum neue Zahlen?

Wie führt man diese ein?

Warum neue Zahlen?

Ein algebraische Grund für N→Q+
N ist nicht abgeschlossen bzgl. Division

Im Unterricht: 3:5 hat kein Ergebnis.
Wir erfinden neue Zahlen und legen fest $3:5 = \frac{3}{5}$

Klappt das in Klasse 5 oder 6?

Wissenschaftlicher Hintergrund

Man <u>konstruiert</u> Q+ aus N

Idee $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ bedeutet $3 \cdot 15 = 9 \cdot 5$

$N \times N_+ = \{(a,b) \mid a,b \text{ aus } N;\ b \neq 0\}$

Definition einer Äquivalenzrelation ~

$(a,b) \sim (c,d)$ genau dann, wenn $a \cdot d = c \cdot b$

Äquivalenzklassen sind Rationale Zahlen

(→ Nicht eindeutige Zahldarstellung)

In der Schule

Man konstruiert bzw. erfindet keine neue Zahlen, weil der Schüler diese schon längst kennt:

$\frac{3}{4}\text{kg}$ $\frac{3}{4}$ einer Pizza

-7°C Im Aufzug: -7

Vorgehen in der Schule

1) Neue Objekte „sind schon da“.
2) Topologische Verortung:
   Wo liegen $\frac{3}{4}$, -7 auf der Zahlengeraden
3) Festlegung der Rechenoperationen nach dem „Permanenzprinzip“
   Z.B. soll $\frac{4}{2}+\frac{3}{1}$ dasselbe Ergebnis haben wie 2+3
   Die „alten“ Rechenregeln AG, KG, DG, sollen gültig bleiben

Bruch - Dezimaldarstellung

Jeder Bruch ist eine abbrechende oder eine periodische Dezimalzahl.

Exemplarischer Beweis

3 : 7 = 0,428571 4 . . . periodisch

30
$\underline{28}$ Rest 2
20
$\underline{14}$
60
$\underline{56}$
40
$\underline{35}$
50
$\underline{49}$
10
$\underline{7}$
30 Rest 2

Bruch - Dezimaldarstellung

Jede abbrechende Dezimalzahl ist ein Bruch.

Exemplarischer Beweis: $1{,}023 = \frac{1023}{1000}$

Jede periodische Dezimalzahl ist ein Bruch.

Beweisidee:

$\frac{1}{9} = 1:9 = 0{,}\bar{1}$ $\qquad \frac{1}{90} = 0{,}0\bar{1}$ $\qquad \frac{1}{99} = 1:99 = 0{,}\overline{01}$ usw.

$$0{,}02\bar{3} = 0{,}02 + 0{,}00\bar{3} = \frac{2}{100} + \frac{3}{900} = \frac{21}{900}$$

Reelle Zahlen – Warum?

Es besteht keine algebraische Notwendigkeit für neue Zahlen.

Q ist ein Körper

Insbesondere abgeschlossen bezüglich

+, -, ·, :

(Kleinster Körper, der N enthält)

Reelle Zahlen – Warum?

Es besteht für den Schüler keine topologische Notwendigkeit für neue Zahlen.

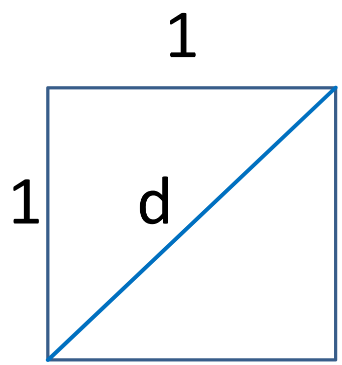
Q liegt dicht

Zwischen zwei rationalen Zahlen liegt eine weitere (liegen unendlich viele weitere) rationale Zahlen.

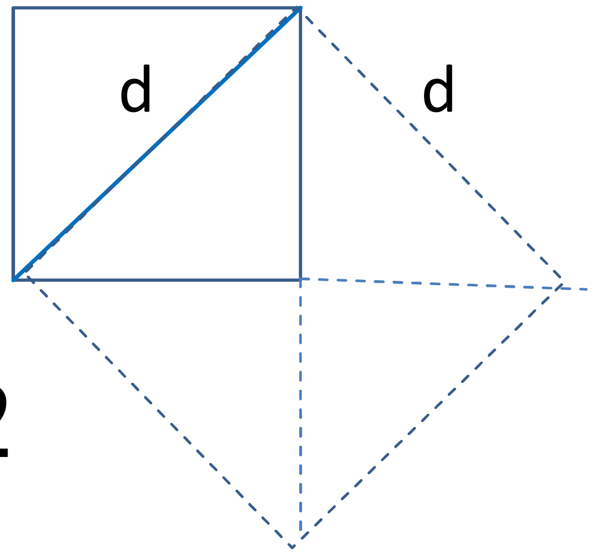
Schüler: Da gibt es doch für weitere Zahlen keinen Platz mehr.

Reelle Zahlen – Warum?

Der Schüler hat keinerlei Vorstellung von den neuen Zahlen. Aber man braucht sie.



Wie lang ist d? (ohne S.d.Pythagoras)



$$d^2 = 2$$

Ist $\sqrt{2}$ rational?

Ist d mit $d^2 = 2$ eine rationale Zahl?

Schüler: Ja, d = 1,4142136
Lehrer: Das kann nicht sein
Schüler: Doch, $1{,}4142136^2 = 2$ im TR

Was tun? Schriftlich nachrechnen
Besser letzte Ziffer von d und d^2 betrachten
$\rightarrow$ d ist keine abbrechende Dezimalzahl

Ist $\sqrt{2}$ eine periodische Dezimalzahl?

Haben Sie eine einfache Beweisidee ?

Blickwechsel auf Bruchdarstellung

Widerspruchsbeweis $\quad d \neq \frac{a}{b}$

Vorher zeigen: Es gibt Dezimalzahlen, die weder abbrechend noch periodisch sind

$$0{,}010010001000010000\ldots$$

$$0{,}1234567891011121314\ldots$$

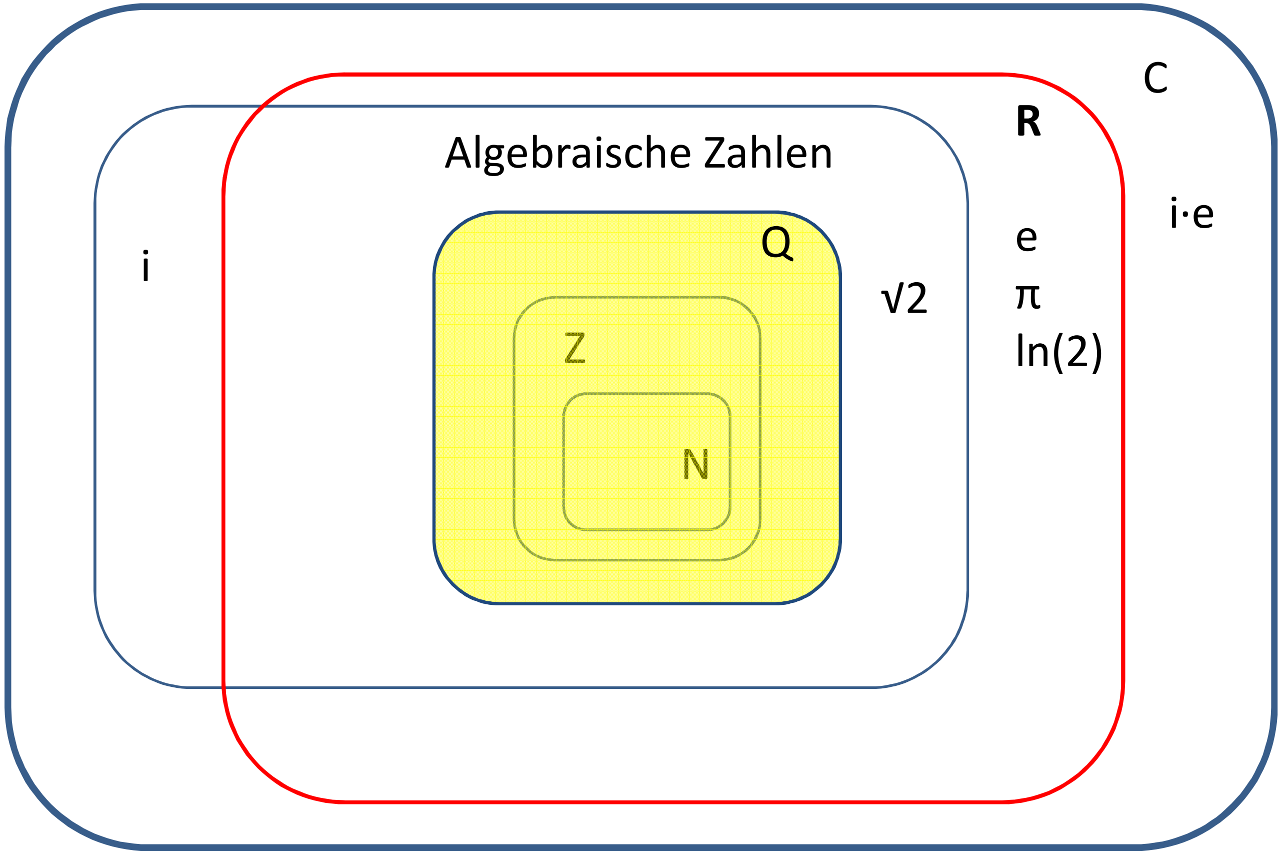
Wissenschaftlicher Hintergrund

Algebraische Argumentation:
Nullstellen von $x^2 - 2 = 0$

Allgemein: Nullstellen von Polynomen mit Koeffizienten aus Z (gleichwertig aus Q).
(Nicht alle Koeffizienten = 0)

→ Führt zur Menge der <u>algebraischen Zahlen</u>

Wissenschaftlicher Hintergrund



e, π, ln(2), sin(2) sind transzendente Zahlen

Konstruktion der reellen Zahlen

- Mit Cauchy-Folgen (~~Schule~~)
- Mit Dedekindschnitten (~~Schule~~)
- Intervallschachtelung

$1{,}4^2<2$	$\mathbf{1{,}4} < \mathbf{1{,}5}$	$1{,}5^2>2$
$1{,}41^2<2$	$\mathbf{1{,}41} < \mathbf{1{,}42}$	$1{,}42^2>2$
$1{,}414^2<2$	$\mathbf{1{,}414}<\mathbf{1{,}415}$	$1{,}415>2$

$$[a_n ; b_n]$$

a_n mon. steigende Folge ; b_n monoton fallende Folge

$a_n < b_n$ und $b_n - a_n$ Nullfolge.

Durch diesen Prozess entsteht eine <u>neuartige</u> Zahl.

Bedeutung der reellen Zahlen

Es existieren gewisse Grenzwerte, z.B.

a_n sei monoton steigend und nach oben beschränkt. Dann ist durch a_n eine Zahl festgelegt.

- 0,9 ; 0,99 ; 0,999 ; . . .
- 0,01 ; 0,01001 ; 0,010010001 ; . . .

Schule:

1. Definitionen mit Grenzwert: Ableitung , Integral
2. Topologisch (Stetigkeit) $f(2)<0$ und $f(3)>0$, dann existiert x aus (2;3) mit $f(x) = 0$.

Vergleich Q und R

1. Q und R sind Körper
2. Q ist nicht vollständig , R ist vollständig
3. Q ist abzählbar ; R ist nicht abzählbar

   Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.

4. Q ist dicht in Q ; R ist dicht in R

   Q ist dicht in R ; R ist dicht in Q