Der Funktionsbegriff

Was ist das?

Definition $\leftrightarrow$ Grundvorstellung

Wozu?

Mögliche Reduktionen?

Funktion- was ist das?

A *Funktion einer veränderlichen Größe nennt man eine Größe, die auf irgendeine Weise aus dieser veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist*
(Bernoulli 1667 – 1748)

Beispiele: $y = 2x^2+5$ $y^2 = x^2$

- Funktion wird durch Term beschrieben
- Eindeutigkeit wird nicht (explizit) gefordert „Punktmengenbeschreibung“
- Definitionsmenge wird nicht erwähnt

Funktion- was ist das?

B *Eine Funktion heißt y von x, wenn jedem Wert der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalls ein bestimmter Wert von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervall nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht, ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht*
(Lejeune- Dirichlet 1805 – 1859)

- Eindeutigkeit wird gefordert
- Definitionsmenge ist ein Intervall
- „Gesetz“ muss kein Term sein

Funktion- was ist das?

gleichviel, ob y in dem ganzen Intervall nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht, ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht

Beispiele

$f(x) = \begin{cases} 1, \text{falls } x \in Q \\ 0, \text{falls } x \notin Q \end{cases}$ (Dirichlet-Funktion)

g(x) = die kleinste Primzahl größer als x

Funktion- was ist das?

C *Es seien A und B nichtleere Mengen und f eine Teilmenge von AxB mit der Eigenschaft: Zu jedem $a \in A$ gibt es genau ein $b \in B$ mit $(a;b) \in f$. Dann heißt f eine Funktion von A nach B.* (Wissenschaftlich)

D *Es sei D eine nichtleere Teilmenge von R. Unter einer Funktion f versteht man eine Vorschrift, welche jedem $x \in A$ genau eine Zahl aus R zuordnet. (Schule-Kursstufe)*

Unterschiede

- Grundvorstellung „Menge“ bzw. „Vorschrift“
- Einschränkung auf reelle Funktionen

Nr.5- 17.11.2014

Funktion- Wozu?

a)

Zeit t in Stunden	0	1	2	3	4	6	t
Höhe h in Meter	0,5	1,5	4,5	13,5	40,5	?	h =

b)

Zeit in t in Stunden	0	1	2	3	4	50	t
Höhe h in Meter	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	?	h =

c)

Zeit in t in Stunden	1	2	3	4	5	6	8	t
Höhe h in Meter	10	5	3,3	2,5	2	1,7	?	h =

Funktion – Wozu?

a)

+1 +1 +1

Zeit t in Stunden	0	1	2	3	4	6	t
Höhe h in Meter	0,5	1,5	4,5	13,5	40,5	364,5	h = 0,5·3^t

·3 ·3 ·3

Funktional-Gleichung $h(t+1) = h(t) \cdot 3$

Funktionsvorschrift als Term $h(t) = 0{,}5 \cdot 3^t$

Man kann Funktionswerte vorhersagen

Funktion – Wozu?

b)

Zeit in t in Stunden	0	1	2	3	4	50	t
Höhe h in Meter	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	?	h =

+1 +1 +1

+0,5 +0,5 +0,5

Funktional-Gleichung $h(x+1) = h(x) + 0{,}5$

Funktionsvorschrift als Term $h(x) = 1 + t\cdot 0{,}5$

Man kann Funktionswerte vorhersagen

Funktion – Wozu?

c)

$\cdot 3$

$\cdot 2$ $\qquad\qquad$ $\cdot 2$

Zeit in t in Stunden	1	2	3	4	5	6	8	t
Höhe h in Meter	10	5	3,3	2,5	2	1,7	?	h =

$:2$ $\qquad\qquad$ $:2$

$:3$

Funktional-Gleichung $\qquad$ $h(k\cdot t) = h(t) : k$

Funktionsvorschrift als Term $\qquad$ $h(t) = \frac{10}{t}$

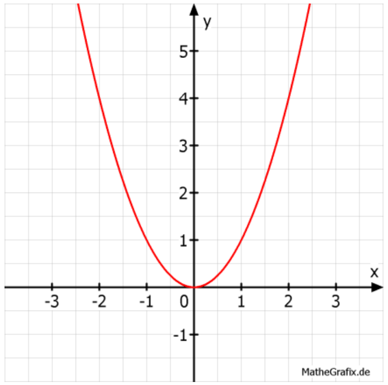
Man kann Funktionswerte vorhersagen

Grundfunktionen

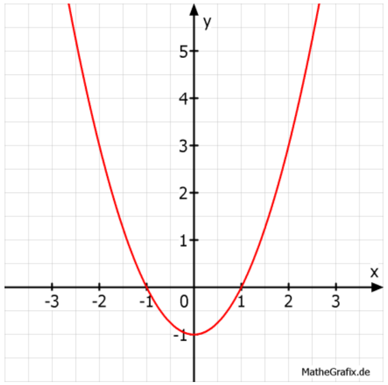
Name	Funktionsterm f(x) =	Funktional-Gleichung	Graph
Proportionale Funktion	$f(x) = 0{,}5x$ $f(x) = m \cdot x$	$f(kx) = k \cdot f(x)$	Gerade durch O; nicht die y-Achse $y = mx$
Lineare Funktion	$f(x) = 0{,}5x+1$ $f(x) = mx + c$	$f(x+1) = f(x) + m$	Gerade, nicht parallel zur y-Achse $y = mx + c$
Antiproportionale Funktion	$f(x) = 10/x$ $f(x) = a/x$	$f(kx) = f(x)/k$	Hyperbel $y = a/x$
Exponentialfunktion	$f(x) = 0{,}5 \cdot 3^x$ $f(x) = c \cdot a^x$	$f(x+1) = a \cdot f(x)$ nicht $\cancel{f(u + v) = f(u) \cdot f(v)}$	Graph $y = c \cdot a^x$
Exponentialfunktion	$f(x) = 3^x$ $f(x) = a^x$	$f(u + v) = f(u) \cdot f(v)$ daraus folgt $f(x+1) = a \cdot f(x)$	Graph $y = a^x$
Logarithmusfunktion	$f(x) = \log(x)$	$(u \cdot v) = f(u) + f(v)$	Graph $y = \log(x)$
Quadratfunktion	$f(x) = x^2$	$f(a \cdot x) = a^2 \cdot f(x)$	Graph $y = x^2$ Normalparabel

Grundfunktion- Graphen

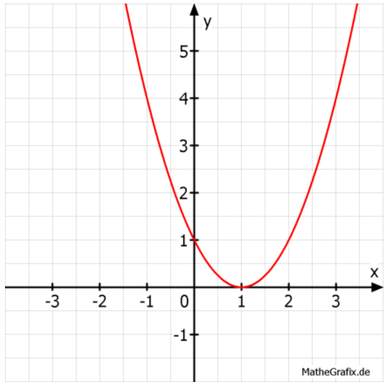
$f(x) = x^2$



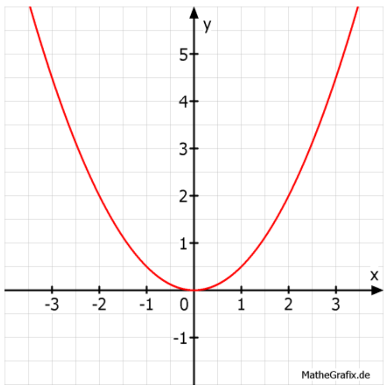
$f(x) = x^2-1$



$f(x) = (x-1)^2$

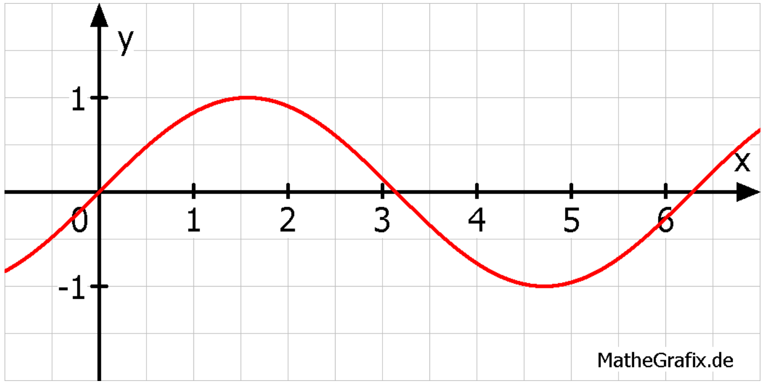


$f(x) = 0{,}5 \cdot x$

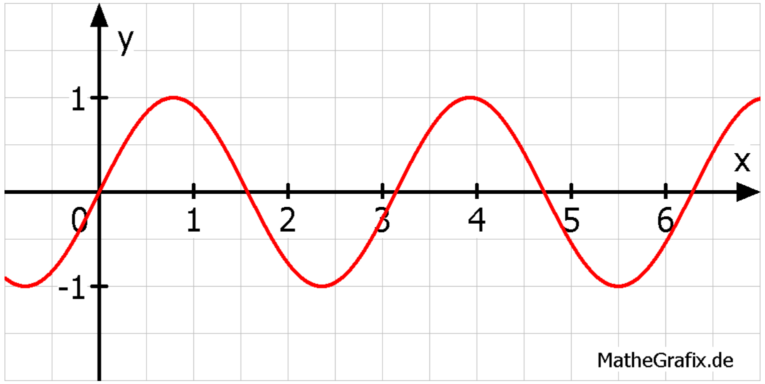


Grundfunktion- Graphen

$f(x) = \sin(x)$

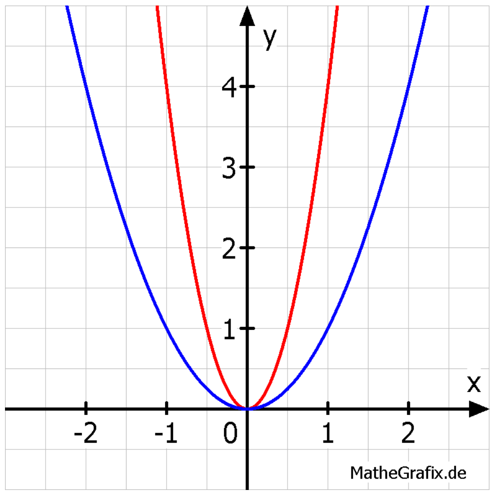


$f(x) = \sin(2x)$



Vergleich $f(x) = (2x)^2$

$= 4x^2$



Affine Transformationen

Geometrische Abbildung	Aus der Funktion f wird die Funktion h
Verschiebung in positiver y-Richtung um d	$h(x) = f(x) + d$ Zu **f(x)** wird d addiert
Verschiebung in positiver x-Richtung um c	$h(x) = f(x - c)$ **x** wird substituiert durch $x - c$
Streckung in positiver y-Richtung mit a	$h(x) = a \cdot f(x)$ **f(x)** wird mit a multipliziert
Streckung in positiver x-Richtung mit b	$h(x) = f(\frac{1}{b} \cdot x)$ **x** wird substituiert durch $\frac{1}{b} \cdot x$

Exkurs: Affine Abbildungen

Eigenschaften:

Geradentreu: Das Bild einer Geraden ist eine Gerade.

Parallelentreu: Parallele Geraden haben parallele Bildgeraden.

Teilverhältnistreu: Dem Teilverhältnis auf einer Geraden entspricht das Teilverhältnis auf der Bildgeraden.

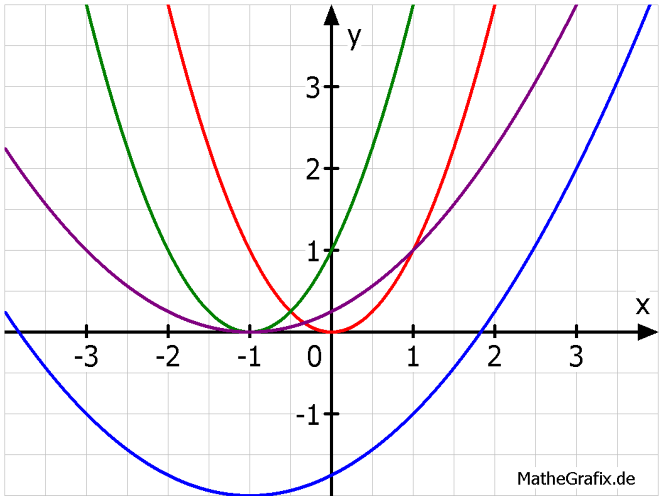
Nicht z.B. Längentreu - Winkeltreu

Hintereinanderschalten

$f(x) = 0,25(x+1)^2-2$

Graph wird schrittweise skizziert

1. x^2
2. $(x+1)^2$ „um 1 nach links“
3. $0,25(x+1)^2$ „mit 0,25 in y-Richt. strecken“
4. $0,25(x+1)^2-2$ „um 2 nach unten“



Scheitel S(-1|-2)

Blickwechsel

$f(x) = 0{,}25(x+1)^2-2$

Beachte: Reihenfolge beim Skizzieren und Reihenfolge beim Rechnen muss nicht die gleiche sein (hier Nr.1)

Skizzieren:

1. x^2
2. $(x+1)^2$
3. $0{,}25(x+1)^2$
4. $0{,}25(x+1)^2-2$

Rechnen:

1. $x+1$
2. $(x+1)^2$
3. $0{,}25(x+1)^2$
4. $0{,}25(x+1)^2-2$

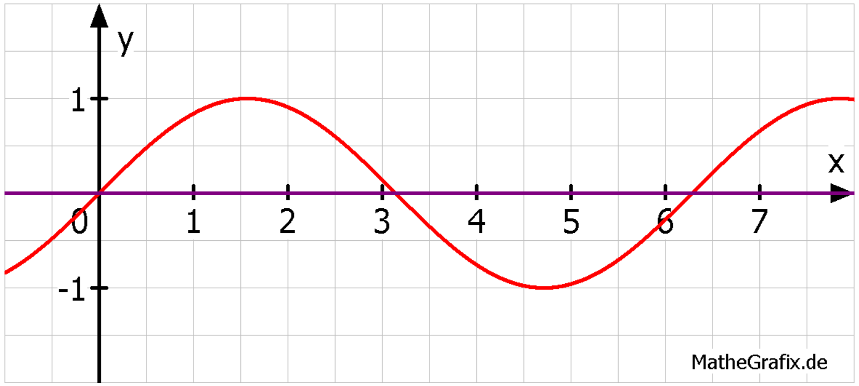
Hintereinanderschalten

Grundfunktion $f(x) = \sin(x)$

Gesucht: Graph von $g(x) = 0{,}5 \cdot \sin(\pi \cdot x)$

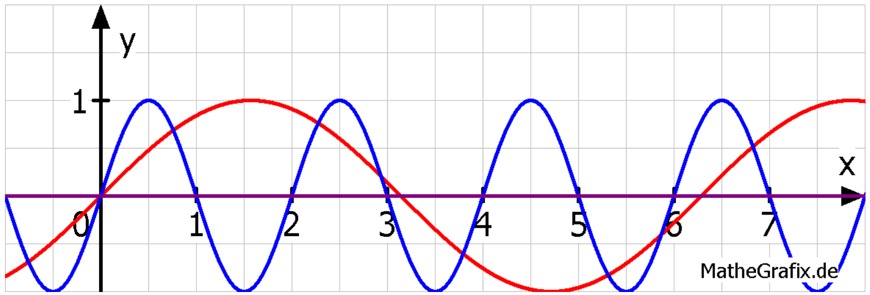
1. $\sin(x)$

Periode 2π



2. $\sin(\pi \cdot x)$

Periode 2



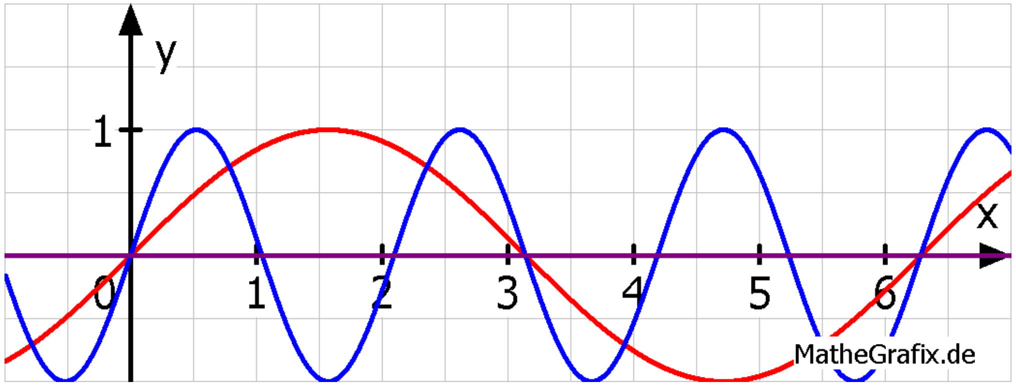
3. $0{,}5 \cdot \sin(\pi \cdot x)$

Hintereinander in x-Richtung

Grundfunktion f(x) = sin(x)

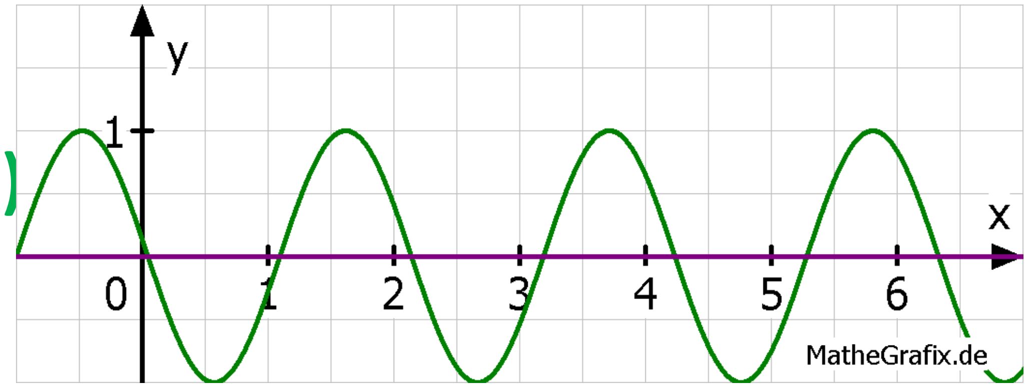
Gesucht: Graph von g(x) = sin(3·x+1)

1. sin(x)
2. sin(3x)



3. **sin(3·(x+1))**

≠ sin(3·x+1)



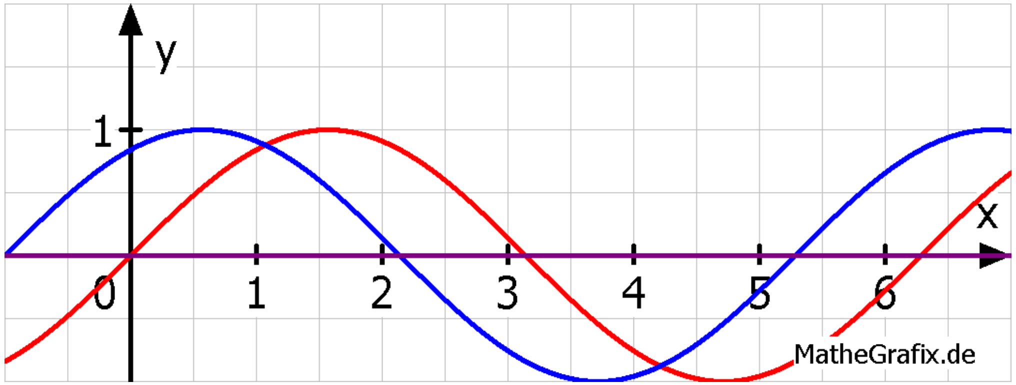
Reihenfolge beim Rechnen führt nicht zum Ziel!

Hintereinander in x-Richtung

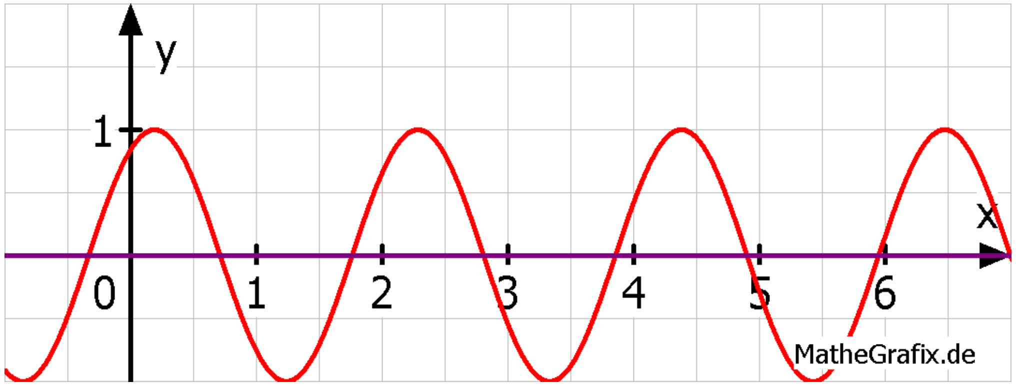
Grundfunktion $f(x) = \sin(x)$

Gesucht: Graph von $g(x) = \sin(3x+1)$

1. $\sin(x)$
2. $\sin(x+1)$



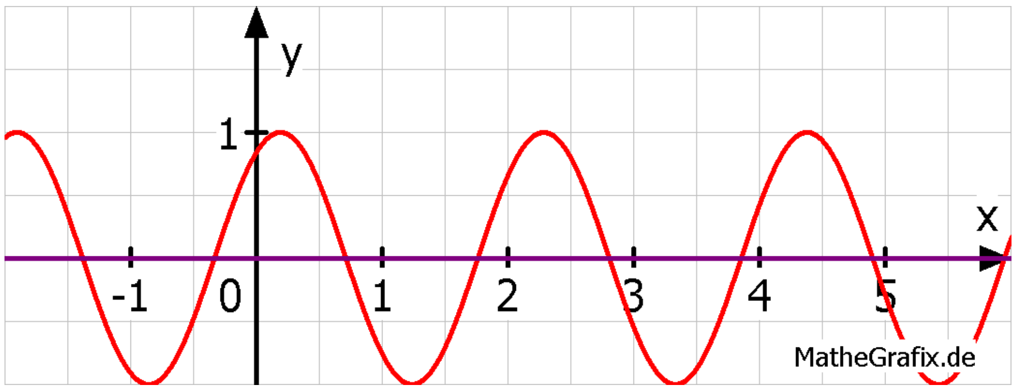
3. **$\sin(3\cdot x+1)$**



Hintereinander in x-Richtung

Vergleich der Darstellungen
Wo kommen die Parameter 3 und 1 im Graphen vor?

$f(x) = \sin(3 \cdot x+1)$
3 - ja
1 - ?



$f(x) = \sin(3 \cdot (x+1))$
3 – ja
1 – ja