Funktionen - Nullstellen

- Bestimme die Nullstellen von f

  Löse $f(x) = 0$

- Bestimme die Schnittstellen der Graphen von f und g

  Löse $f(x) = g(x)$ bzw. $f(x) - g(x) = 0$

- Für welche x ist $f(x) > g(x)$

  Löse $f(x) - g(x) > 0$

Wie löst man Gleichungen $h(x) = 0$?

Wie löst man Ungleichungen $h(x) > 0$?

Gleichungen

Technik 1: Äquivalenzumformungen

Tafelanschrieb

$$(x+1)^2 - 4 = 6 + x^2$$
$$x^2 + 2x + 1 - 4 = 6 + x^2 \quad | -x^2$$
$$2x + 1 - 4 = 6$$
$$2x - 3 = 6 \quad | +3$$
$$2x = 9$$
$$x = 4{,}5$$

Hier stehen sechs Gleichungen untereinander.
Was bedeutet das?

Gleichungen

Technik 1: Äquivalenzumformungen

Jede der Gleichungen hat dieselbe Lösungsmenge.
Warum?

Äquivalenzumformung einer **Gleichung**

$$(x+1)^2 - 4 = 6 + x^2$$
$$x^2 + 2x + 1 - 4 = 6 + x^2 \quad | -x^2$$
$$2x + 1 - 4 = 6$$
$$2x - 3 = 6 \quad | +3$$
$$2x = 9$$
$$x = 4{,}5$$

Lösung: 4,5 oder L={4,5}

Äquivalenzumformungen

Definition: Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Lösungsmenge besitzen.

Satz: Die Lösungsmenge einer Gleichung wird nicht verändert, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung

1. Dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert
2. Mit der derselben Zahl $r \neq 0$ multipliziert oder dividiert.
3. Eine Seite der Gleichung durch einen äquivalenten Term ersetzt.

Nr.1,2 heißen **Äquivalenzumformung einer Gleichung**

Tafelaufschrieb

Wie schreibt man das an die Tafel?

1. $2x - 3 = 6 \quad | +3$

Ist äquivalent zu $2x = 9$

2. $2x - 3 = 6 \quad | +3$

Hat dieselbe Lös.menge wie $2x = 9$

3. $2x - 3 = 6 \quad | +3$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 9$

Hilft dieses Symbol zum Verständnis?

Symbole: Helfen oder verwirren?

Stimmt hier

$\sqrt{x} = 5 \quad | \text{ Quadrieren}$

$\Leftrightarrow \quad x = 25$

Symbol wie bei Äquivalenzumformung ; ist aber keine.

$(\sqrt{x})^2 \neq x$ nicht allgemeingültig: z.B. $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$

$\sqrt{x} = -5 \quad | \text{ Quadrieren}$

Falsch

$\Leftrightarrow \quad x = 25$

$L_1 = \{\}$

$L_2 = \{25\}$

Besser mit $\Rightarrow$ oder $\Leftarrow$?

a) $\sqrt{x} = -5 \;|\text{Quadr.}$

$\Rightarrow \quad x = 25$

b) $\sqrt{x} = -5 \;|\text{Quadr.}$

$\Leftarrow \quad x = 25$

Was bedeutet **in diesem Kontext** $\Rightarrow$ bzw. $\Leftarrow$?

Symbole klar verwenden

Man muss sagen, was man mit Symbolen meint.

Ist äquivalent zu

Gleichung I
$\Leftrightarrow$ Gleichung 2

Gleichung 1
$\Rightarrow$ Gleichung 2

L_1 ist in L_2 enthalten

Jede Lösung von G_1 ist auch Lösung von G_2

d.h. es können Lösungen dazukommen, aber nicht wegfallen.

Wurzelgleichungen

$$
\begin{aligned}
& \sqrt{x+8} - x = 2 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{x+8} = x + 2 \\
\Rightarrow\quad & x + 8 = (x+2)^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x + 8 = x^2 + 4x + 4 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + 3x - 4 = 0
\end{aligned}
$$

Mit Lösungsformel: $x_1=-4$ oder $x_2=1$

Probe in der Ausgangsgleichung ergibt L ={1}

Wird quadriert, muss eine Probe gemacht werden.

Bruchgleichungen

Zwei Möglichkeiten für das Lösungsverfahren

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} \quad \Big| \cdot (x-1)$$

$$\Rightarrow \quad x = 1$$

Probe in der Ausgangsgleichung ergibt L ={ }

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}; \quad D = \Re \setminus \{1\}$$

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1} \quad \Big| \cdot (x-1);\ x \neq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 1; \qquad x \neq 1$$

Vergleich mit Def.Menge ergibt L ={ }

Welches Lösungsverfahren ist für die Schule besser geeignet?

Betragsgleichungen

$$|x-1| = 2x$$

Fallunterscheidung

1. Fall: x-1 ≥ 0
d.h. x ≥ 1

$$|x-1| = 2x$$
$$\Leftrightarrow \quad x-1 = 2x$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -1$$

$L_1 = \{\ \}$

2. Fall: x-1 < 0
d.h. x < 1

$$|x-1| = 2x$$
$$\Leftrightarrow -x+1 = 2x$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}$$

$L_2 = \{\frac{1}{3}\}$

Insgesamt: $L = \{\frac{1}{3}\}$

Ungleichungen

Satz: Die Lösungsmenge einer **Un**gleichung wird nicht verändert,wenn man auf beiden Seiten der **Un**gleichung

1. Dieselbe Zahl addiert oder subtrahiert
2. Mit der derselben Zahl **$r>0$** multipliziert oder dividiert.
3. Mit der derselben Zahl $r<0$ multipliziert oder dividiert und < mit > tauscht.
4. Eine Seite der **Un**gleichung durch einen äquivalenten Term ersetzt.

Bruch-Ungleichungen

$$\frac{x-1}{x+3} \geq 1$$

Fallunterscheidung

1.Fall: $x+3>0$; d.h. $x>-3$

$x-1 \geq x+3$

$\Leftrightarrow -1 \geq 3$

$L_1 = \{\ \}$

2.Fall: $x+3<0$; d.h. $x<-3$

$x-1 \leq x+3$

$-1 \leq 3$

$L_2 = (-\infty; -3)$

Insgesamt: $L=(-\infty; -3)$

Betrags-Ungleichungen

$$|3x-1| + |x+2| \leq 3$$

Fallunterscheidung

1.Fall: $x < -2$

$(-3x+1)+(-x-2) \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad -4x \leq 4$

$\Leftrightarrow \quad x > -1$

$L_1 = \{ \}$

2.Fall: $-2 \leq x \leq \frac{1}{3}$

$(-3x+1)+(x+2) \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad -2x \leq 0$

$x \geq 0$

$L_1 = [0; \frac{1}{3}]$

2.Fall: $x > \frac{1}{3}$

$(3x-1)+(x+2) \leq 3$

$4x \leq 2$

$x \leq \frac{1}{2}$

$L_1 = (\frac{1}{3}; \frac{1}{2}]$

Insgesamt: $L=[0; \frac{1}{2}]$

Exkurs: „Gleichung“

Eine „Gleichung“ $2x - 6 - x = x - 6$; zwei Bedeutungen?

1. Es ist eine Aussageform, d.h. ein Ausdruck mit einer Variablen, der beim Einsetzen einer Zahl zu einer Aussage wird, die wahr oder falsch ist. Bedeutung: Diese Gleichung legt diejenige Menge L von Zahlen fest, die zu einer wahren Aussage führen. Hier $L = R$.

2. Es ist ein Term und der vereinfachte Term.
   Bedeutung dieser Gleichung:
   Für alle x aus R ist $2x - 6 - x$ äquivalent* zu $x - 6$.
   (*Beachte: Äquivalenz von <u>Termen</u>)

Gleichungen – Ein weites Feld

- Polynomgleichungen $(2x-7)^2(x^3 + 3x^2+x) = 0$
- Exponentialgleichungen $4e^{0,5x-1} + 1 = 0$
- Trigonometrische Gleichungen $3\sin(2x+1) = 1,5$
- Gleichungen mit Parameter $x^3 - 4ax = 0$
- Integralgleichungen $\int_0^x t^2 dt = 9$