Zusammengesetzte Funktionen

Aus Funktionen g und h werden neue Funktionen gebildet:

a) $f = g+h$, mit $f(x) = g(x) + h(x)$; Summe
b) $f = g-h$, mit $f(x) = g(x) - h(x)$; Differenz
c) $f = g \cdot h$, mit $f(x) = g(x) \cdot h(x)$; Produkt
d) $f = g:h$, mit $f(x) = g(x) : h(x)$; Quotient; $h(x) \neq 0$

Das ergibt zunächst ein unüberschaubares Durcheinander von Funktionen.

Funktionen-Klassen

Strukturierung

- Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

  f(x) = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \;; a_i \in R; n \in N$

- Gebrochenrationale Funktionen

  f(x) = $\dfrac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0} \;; a_i, b_i \in R$;Nennerpolynom≠0

- Zusammensetzungen mit e^x
- Zusammensetzungen mit sin(x); cos(x)
- Zusammensetzungen mit ln(x)

Funktionen-Klassen

Neue Untersuchungsmethoden

- Nullstellen
- Symmetrie
- Verhalten für x gegen $\pm\infty$
- Asymptoten
- Monotonie

Ganzrationale Funktionen

Definition: Eine Funktion heißt ganzrational, wenn man Sie in der Form f(x) = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \,; a_i \in R$ schreiben kann.

Folgerung: f hat den Definitionsbereich R.

Diese abstrakte Definition muss erarbeitet werden.
Alternative Definition an exemplarischen Beispielen.

Vorwissen:

Potenzfunktionen h(x) = $x^n ; n \in N$ als Grundfunktionen

Faktorprodukt k·h(x) von Funktionen

Summe h(x) + g(x) von Funktionen

Definition erarbeiten

1) Grundfunktionen g(x) = $x^n; n \in \mathbb{N}_0$
   Zusammensetzungen „Summe“ und „Faktorprodukt“
   $f(x) = 4x^4 + x$; ~~$g(x) = 3\sin(x^2)$~~ ; $h(x) = 1 + x^2 + 2x + 6x^3$ *usw.*

2) Alle in einheitlichem Format aufschreiben.
   So $h(x) = 1 + 2x + x^2 + 6x^3$ *oder* $h(x) = 6x^3 + x^2 + 2x + 1$

3) h(x) = $6x^3 + x^2 + 2x + 1$ ist <u>ein</u> Polynom vom Grad 3.
   Wie kann man alle Polynome vom Grad 3 schreiben?
   So $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *oder* $h(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a$
   Problem: Die Buchstaben können ausgehen.

4) Indizierung: So $h(x) = a_1x^3 + \ldots + a_4$ *oder* $h(x) = a_4x^3 + \ldots + a_1$
   oder $h(x) = a_3x^3 + \ldots + a_0$ *oder* . . .

Nullstellen - Strategien

- Lösungsformel $x^2 - 2x - 3 = 0$
- Satz vom Nullprodukt $(5x+1)(x^2 - 2x - 3) = 0$
- Faktorisieren $2x^4 - 4x^3 - 6x^2 = 0$
- Substitution $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$
- Polynomdivision $x^3 + 8x^2 - 23x - 30 = 0$

Und das war es !

Polynomdivision

$x^3 + 8x^2 - 23x – 30 = 0$

Rate und bestätige: $x_1 = -1$ ist Nullstelle. Für $x \neq -1$ ist

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 8x^2 - 23x - 30):(x+1) = x^2 + 7x - 30 \\
\underline{-(x^3 \;\; + x^2)} \\
\qquad 7x^2 - 23x - 30 \\
\quad -\underline{(7x^2 + 7x)} \\
\qquad\qquad -30x - 30 \\
\qquad\quad \underline{-(-30x - 30)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Also $x^3 + 8x^2 - 23x – 30 = (x^2 + 7x – 30)\cdot(x+1)$ für $x \neq -1$

Für $x = -1$ gilt das auch (durch Einsetzen bestätigen)

Polynomdivision mit Rest

$x^3 + 8x^2 - 23x - 10 = 0$ (statt $x^3 + 8x^2 - 23x - 30 = 0$)

Bestätige: $x_1 = -1$ ist <u>keine</u> Nullstelle. Für $x \neq -1$ ist

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + 8x^2 - 23x - 10):(x+1) = x^2 + 7x - 30 + \frac{20}{x+1} \\
\underline{-(x^3 \;\; + x^2)} \\
\qquad\quad 7x^2 - 23x - 10 \\
\qquad \underline{-(7x^2 + 7x)} \\
\qquad\qquad\qquad -30x - 10 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(-30x - 30)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 20
\end{array}
$$

Linearfaktoren

$x^3 + 8x^2 - 23x - 30 = (x^2 + 7x - 30)\cdot(x+1)$

(Mitternachtsformel) $= (x+10)\cdot(x-3)\cdot(x+1)$

$x^2+1 = (x + ?)\cdot(x+?)$

Imaginäre Einheit i. Definition: $i^2 = -1$

$x^2+1 = (x + i)\cdot(x-i)$

Probe: $(x + i)\cdot(x-i) = x^2 + xi - xi - i^2 = x^2 - (-1) = x^2 + 1$

Wissenschaftlicher Hintergrund

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten hat eine Nullstelle in den komplexen Zahlen C.

$z^2 - 6z + 13 = 0$ $\quad z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4\sqrt{-1}}{2}$

$z_1 = 3+2i$; $z_2 = 3-2i$

Es ist: $z^2 - 6z + 13 = (z-(3+2i)) \cdot (z-(3-2i))$

Linearfaktoren

Es gilt auch:

Jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten hat eine Nullstelle in den komplexen Zahlen C.

Nullstellen abspalten - Faktorisieren

Satz: Ist z eine Nullstelle des Polynoms f, dann gilt
$f(x) = (x-z)\cdot g(x)$, wobei $Grad(g) = Grad(f) - 1$

Beweis: $f(x) = \quad f(x) - f(z)$

$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 - \left(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0\right)$

$= a_n (x^n - z^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - z^{n-1}) + \ldots + a_1 (x^1 - z^1)$

Vorwissen exemplarisch: $x^4 - z^4 = (x-z)\cdot(x^3 + x^2 z + x z^2 + z^3)$

$= (x - z)\cdot[a_n \cdot Pol^{\text{Grad } n-1} + a_{n-1}\cdot Pol^{\text{Grad } n-2} + \ldots + a_1]$

$= (x-z)\cdot g(x)$, wobei $Grad(g) = Grad(f) - 1$

Also:

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen

Wieviel reelle Nullstellen?

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskriminante $D = b^2 - 4ac$

Polynom vom **Grad 1**: Eine reelle Nullstelle

Polynom vom **Grad 2**:

D>0   Zwei reelle Nullstellen

D=0   Genau eine reelle Nullstelle

D<0   <u>Zwei</u> komplexe Nullstellen (konjugiert komplex)

Polynom vom **Grad 3**: (Grad 1) · (Grad 2)

------------------Eine reelle- zwei reelle- drei reelle

Polynom vom **Grad 4**: (Grad 2) · (Grad 2)

Keine reelle - Eine reelle- zwei reelle- drei reelle – vier reelle

Doppelte Nullstellen (in R)

$f(x) = (x-2)^2 \cdot (x^2+1)$

Allgemein: $f(x) = (x-z)^2 \cdot g(x)$ und $g(z) \neq 0$*

z heißt doppelte Nullstelle.

Auf Übungsblatt zu zeigen:

$* \Leftrightarrow f(a) = f'(a) = 0$ und $f''(a) \neq 0$

d.h Der Graph von f hat an der Stelle a eine Extremstelle

d.h Der Graph von f berührt die x-Achse an der Stelle a

Exkurs: Satz von Vieta

Im Unterricht:

$(x-2)(x-3) = x^2 -5x + 6$; $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

Finde Formel: $(x-u)(x-v) = x^2 -(u+v)\cdot x + (u\cdot v)$

Geht das auch rückwärts?

$x^2 + 10x + 21 = (x-u)\cdot(x-v)$

$10 = -(u+v)$ und $21 = u\cdot v$.

Kombinieren: ~~$u = 3; v = 7$~~ ; $u = -3; v = -7$

Können Sie es? $x^2 + 5x - 6 = (x+u)\cdot(x+v)$

$u = ?$; $v = ?$