Zusammengesetzte Funktionen
Graphen skizzieren

Ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen)

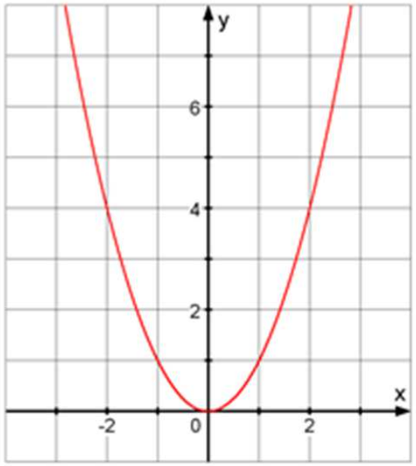
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \; ; a_i \in R ; n \in N$$

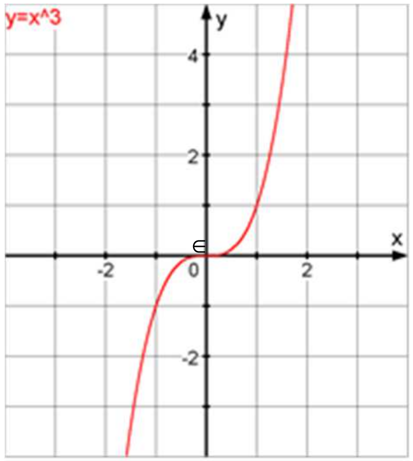
Untersuchungsmethoden

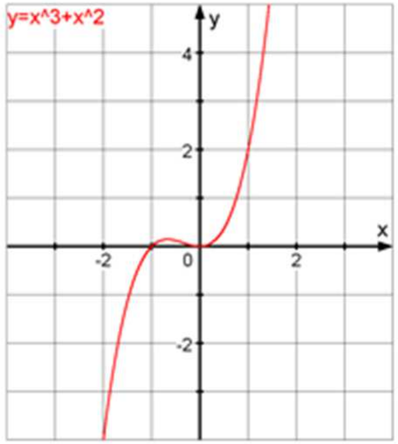
- Nullstellen (siehe Vorlesung Nr.7)
- Symmetrie
- Verhalten für x gegen ±∞
- Asymptoten
- Monotonie (später bei Ableitung)

Symmetrie - Hinführung

Ist der Graph symmetrisch?







Welche funktionale Beschreibung passt?

a) $f(x) = f(-x)$ b) $-f(x) = f(-x)$ c) $-f(-x) = f(x)$

d) $f(x_0+h) = f(x_0-h)$

immer: . . für alle $x \in R$

Symmetrie - Definition

Definition 1: Der Graph einer Funktion f heißt achsensymmetrisch zur y-Achse genau dann, wenn

$f(x) = f(-x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Definition 2: Der Graph einer Funktion f heißt punktsymmetrisch zum Ursprung genau dann, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Symmetrie - Definition

Definition 3: Der Graph einer Funktion f heißt achsensymmetrisch zur Geraden x = a genau dann, wenn . . . . . . für alle Werte in D gilt.

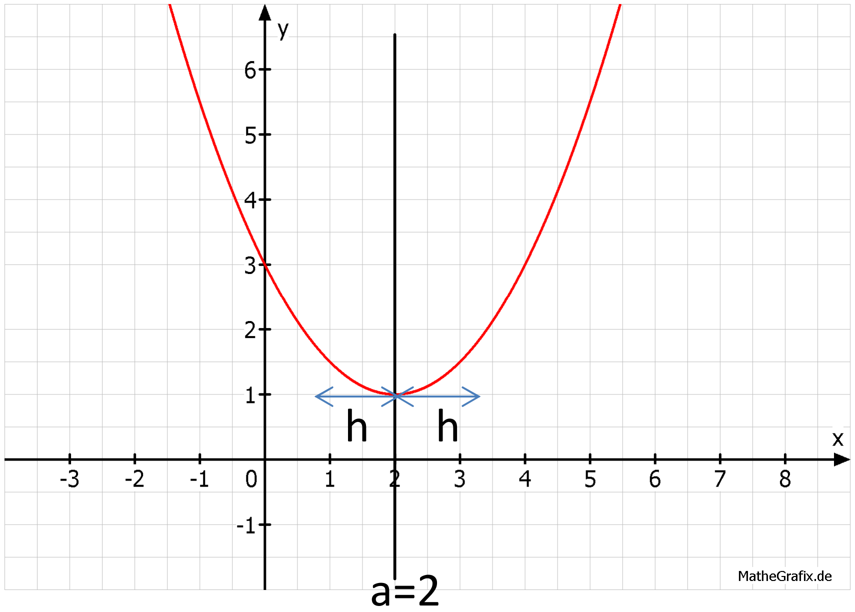
Definition?

Richtig oder falsch?

I. $f(a+h)= f(a-h)$

II. $f(a-h) = -f(a+h)$

III. $f(a+h)-f(a) = f(a-h)-f(a)$



Symmetrie - Definition

Definition 4: Der Graph einer Funktion f heißt punktsymmetrisch zum Punkt P(u|v) genau dann, wenn . . . . . für alle Werte in D gilt.

Definition?

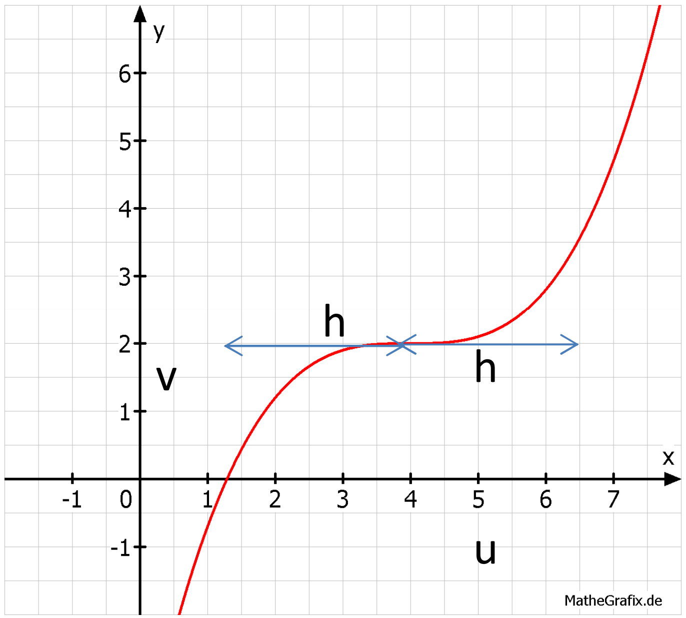
Richtig oder falsch?

I. $\frac{1}{2}[f(u+h)+f(u-h)] = v$

II. $f(u+h)-v= v-f(u-h)$

III. $f(u+h)-v= f(u-h)-v$

IV. $|f(u+h)-v|= |f(u-h)-v|$



Symmetrie - Satz

Satz 1: Der Graph einer ganzrationalen Funktion f in der Form f(x) = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \,; a_i \in R; n \in N$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse genau dann, wenn alle Hochzahlen von x gerade sind.

Beweis:

$\leftarrow$ Idee: Alle n gerade, also $(-x)^n = x^n$, also f(-x) = f(x)

$\rightarrow$ Idee: f(-x) = f(x), also $a_2(-x)^2 + a_1(-x) + a_0 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$
für <u>alle x aus R.</u> Da $a_2(-x)^2 = a_2 x^2$, gilt $a_1(-x) = a_1 x$.
Diese Gleichung hat für $a_1 \neq 0$ nur eine Lösung.
Also $a_1 = 0$.

Symmetrie - Satz

Satz 2: Der Graph einer ganzrationalen Funktion f in der Form f(x) = $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \,; a_i \in R ; n \in N$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung genau dann, wenn alle Hochzahlen von x ungerade sind.

Folgerung aus Satz 1 und Satz 2:
Kommen gerade <u>und</u> ungerade Hochzahlen von x vor,

- Ist der Graph nicht achsensymmetrisch zur y-Achse
- Ist der Graph nicht punktsymmetrisch zum Ursprung
- Kann eine andere Symmetrie haben

Verhalten gegen Unendlich

$$a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = x^2(a_2 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^2}) \to a_2x^2 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = x^3(a_3 + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_1}{x} + \frac{a_0}{x^2}) \to a_3x^3 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$

Was sagt uns das für $x \to \pm\infty$?

Satz: Sei f ganzrational vom Grad n. Dann gilt:

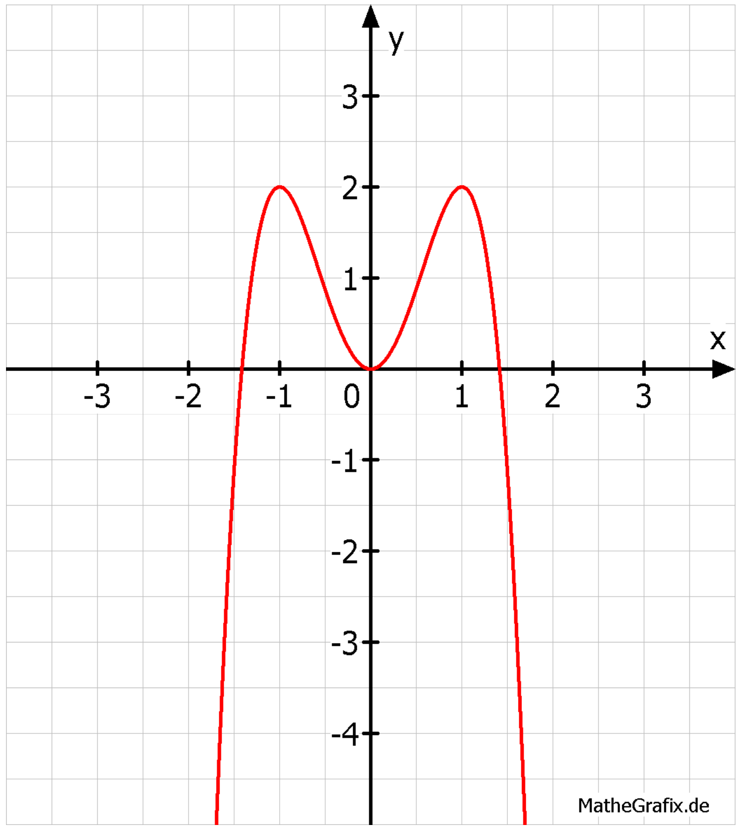
$$f(x) \to a_n x^n \text{ für } x \to \pm\infty$$

Aufgabe:

Skizziere den Graphen von f mit $f(x) = -2x^4 + 4x^2$

Graphen skizzieren

Skizziere den Graphen von
f mit $f(x) = -2x^4 + 4x^2$



Gebrochenrationale Funktionen

f(x) = $\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0} = \frac{p(x)}{q(x)}; a_i, b_i \in R$; $q(x) \neq 0$

Kann man die Erkenntnisse von den ganzrationalen Funktionen übertragen?

1) Nullstellen $f(x) = 0 \iff p(x) = 0$ und $q(x) \neq 0$

2) Symmetrie

a) Die Definitionen $f(-x) = f(x)$ bzw. $f(-x) = -f(x)$ für alle x mit $q(x) \neq 0$ gelten weiter.

b) Gelten die Sätze weiter? Nein! Beispiele:

I. $\frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$

II. $\frac{x^1}{x^3} = \frac{1}{x^2}$

III. $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$

Verhalten für $x \rightarrow \infty$

$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0} = \frac{p(x)}{q(x)}; a_i, b_i \in R$; $q(x) \neq 0$; **gekürzt!**

Fallunterscheidung:

1) Grad(p) = Grad(q)

$$\frac{6x^4 + 2x^3 + \ldots}{3x^4 - 7x^3 + \ldots} = \frac{6 + \frac{2}{x} + \ldots}{3 - \frac{7}{x} + \ldots} \rightarrow \frac{6}{2} = 3$$

Waagrechte Asymptote $y = \frac{a_n}{b_n}$

2) Grad(p) < Grad(q)

$$\frac{6x^3 + 2x^2 + \ldots}{3x^4 - 7x^3 + \ldots} = \frac{\frac{6}{x} + \frac{2}{x^2} + \ldots}{3 - \frac{7}{x^1} + \ldots} \rightarrow \frac{0}{3} = 0$$

Waagrechte Asymptote $y = 0$

Methode: Kürzen mit der höchsten Potenz

Verhalten gegen Unendlich

f(x) = $\frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0} = \frac{p(x)}{q(x)}; a_i, b_i \in R$; q(x) ≠ 0; **gekürzt!**

Fallunterscheidung:

3) Grad(p) > Grad(q)

$$\frac{6x^4 + 2x^3 + \ldots}{3x^3 - 7x^2 + \ldots} = \frac{6 + \frac{2}{x} + \ldots}{\frac{3}{x^1} - \frac{7}{x^2} \ldots} \rightarrow \cancel{\frac{6}{0}}$$

Asymptote ?

$$\frac{x^3 + 8x^2 - 23x - 10}{x + 1} =$$

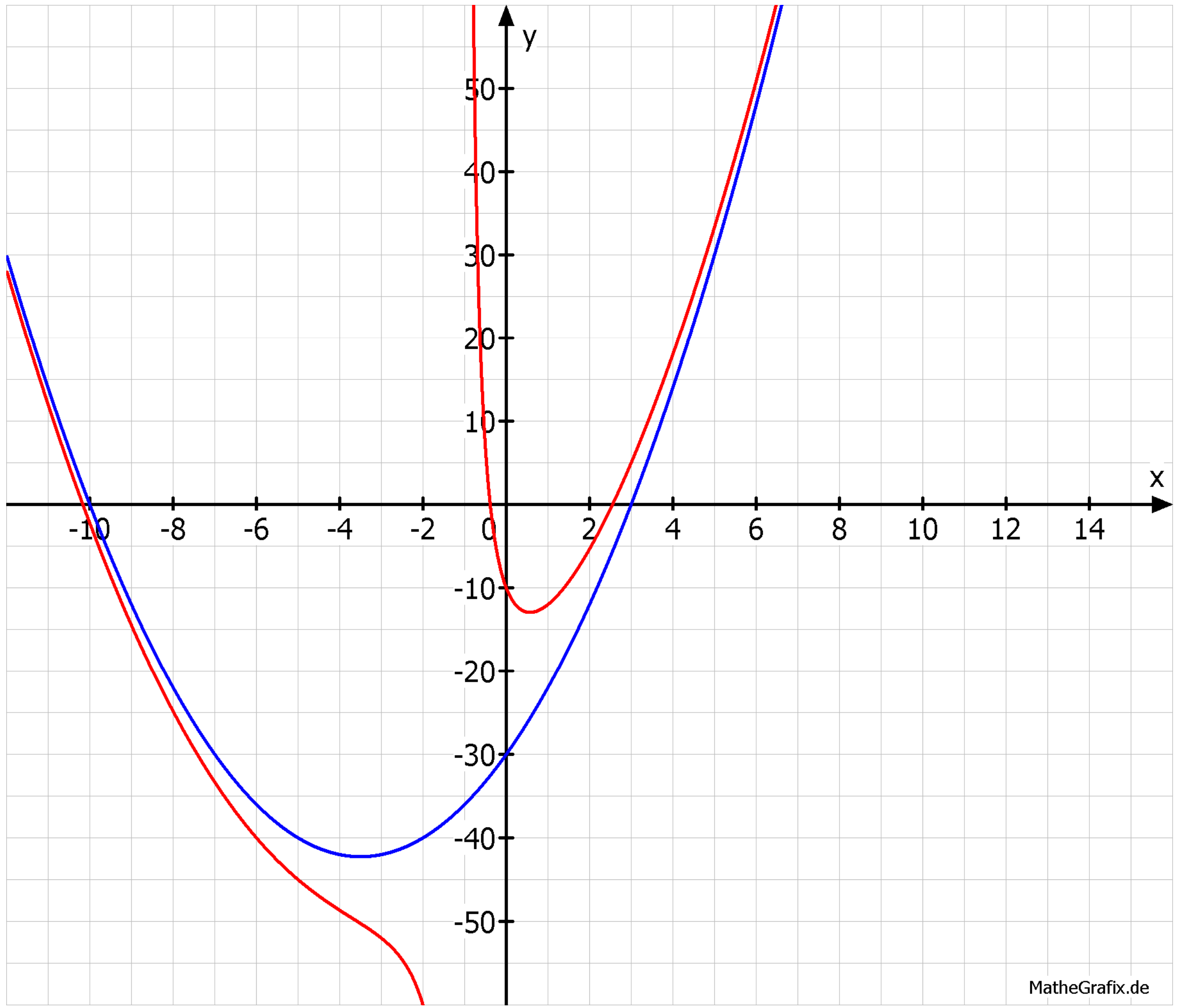
$(x^3 + 8x^2 - 23x - 10):(x+1)$

$$= x^2 + 7x - 30 + \frac{20}{x+1}$$

Näherungskurve: $y = x^2 + 7x - 30$

Ist Grad(p) = Grad(q)+1, dann <u>schiefe Asymptote</u>

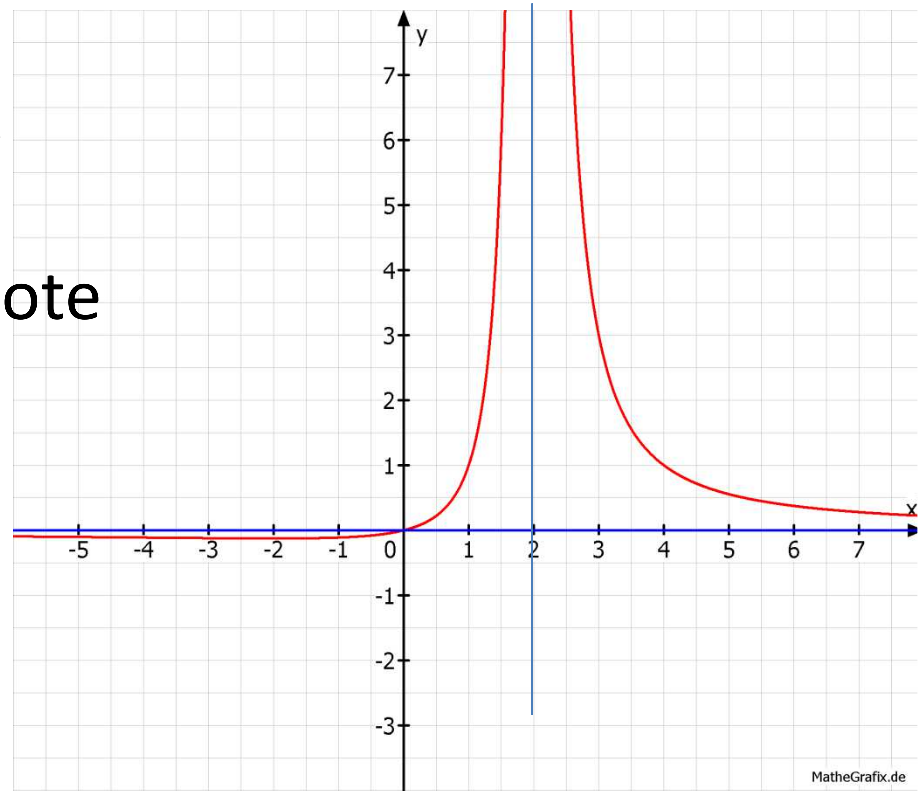
Nr.7- 1.12.2014


y
50
40
30
20
10
x
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12
14
-10
-20
-30
-40
-50
MatheGrafix.de

Neu: Senkrechte Asymptoten-Polstellen

Definition: Eine Stelle a heißt Polstelle von f, wenn gilt $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow a$ (Mit bzw. Vorzeichenwechsel)

$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$; Polstelle x = 2



Graph: Senkrechte Asymptote
x= 2

Wie skizziert man den Graphen?

Wie erkennt man Polstellen?

f(x) = $\frac{x-2x+1}{x-1}$;   x ≠ 1.   Polstelle x = 2 ?

= $\frac{(x-1)^2}{x-1} = x-1$; x ≠ 1. Keine Polstelle, sondern lediglich „Lücke“ in Gerade y = x-1.

Eine gebrochen-rationale Funktion f(x) = $\frac{p(x)}{q(x)}$ hat an der Stelle a dann eine Polstelle, wenn q(a) = 0 und p(a) ≠ 0.

Graphen skizzieren

$$f(x)= \frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$$g(x) = \frac{3x^2}{x^2+2}$$

Wie skizziert man den Graphen?

Graphen skizzieren

$$f(x)= \frac{x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$$g(x) = \frac{3x^2}{x^2+2}$$