Die Ableitung

Didaktische Überlegungen

Da es sich um eine Definition handelt

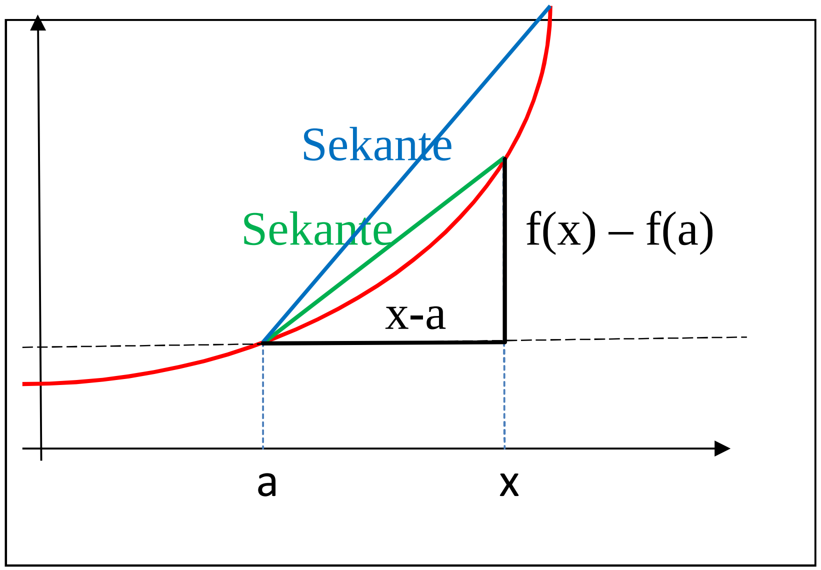
- Wie lautet diese fachlich korrekt?
- Muss/kann der fachliche Anspruch reduziert werden?
- Wie kann die Definition motiviert werden? (Frage nach dem „Warum“)
- Auf welchen Wegen kann man fachlich zur Definition hinführen?

Die Ableitung: Definition

C. Die Funktion f sei auf einem Intervall J definiert. f heißt differenzierbar an der Stelle $a \in J$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existiert.}$$

Wenn der Grenzwert existiert, wird er mit f´(a) bezeichnet und heißt **Ableitung von f an der Stelle a**.



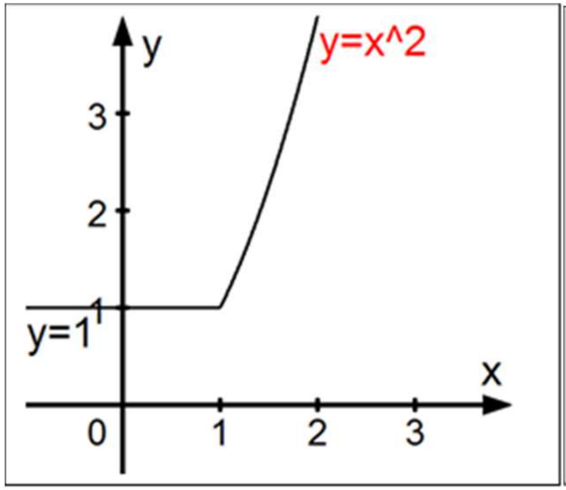
Die Ableitung: Definition

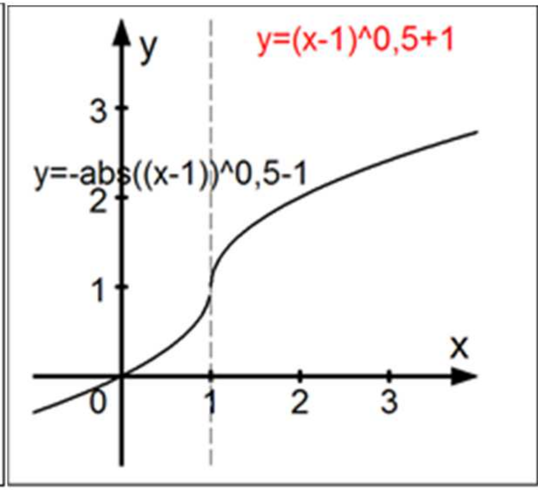
C. Die Funktion f sei auf einem Intervall J definiert. f heißt differenzierbar an der Stelle $a \in J$, wenn der Grenzwert

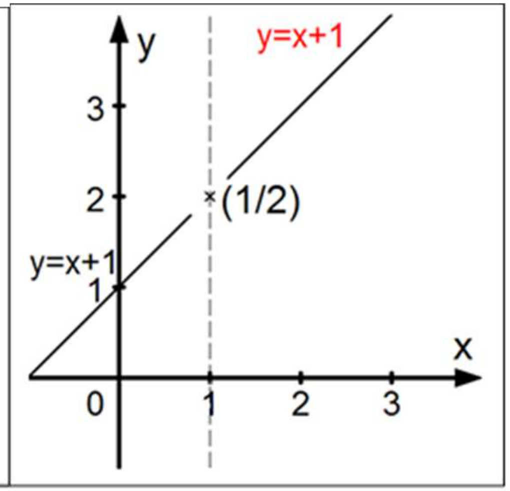
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existiert.}$$

Differenzierbar bei a = 1?

$y = 1$ $\qquad y = x^2$ $\qquad y = -\sqrt{1-x} - 1$ $\qquad y = \sqrt{x-1} + 1$ $\qquad y = x+1$







Die Ableitung: Definition

C. Die Funktion f sei auf einem Intervall J definiert. f heißt differenzierbar an der Stelle $a \in J$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{existiert.}$$

<u>Reduzierung des Anspruchs</u>

- Definitionsmenge ist Intervall
- Damit ist a automatisch Häufungspunkt
- Keine Untersuchung z.B. an isolierten Stellen

Beachte:

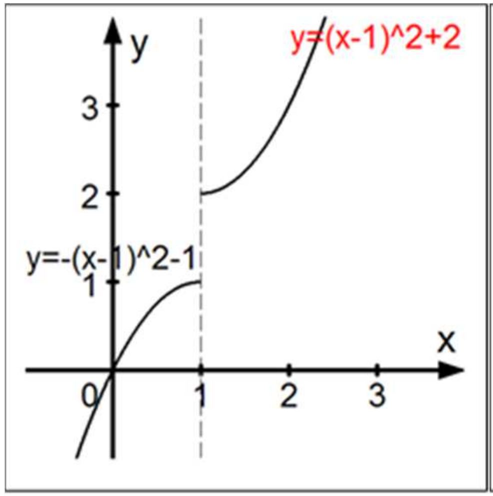
- Keine Voraussetzungen an f (wie z.B. Stetigkeit)
- Die Definition fordert die Existenz des links- und rechtsseitigen Grenzwerts und deren Übereinstimmung

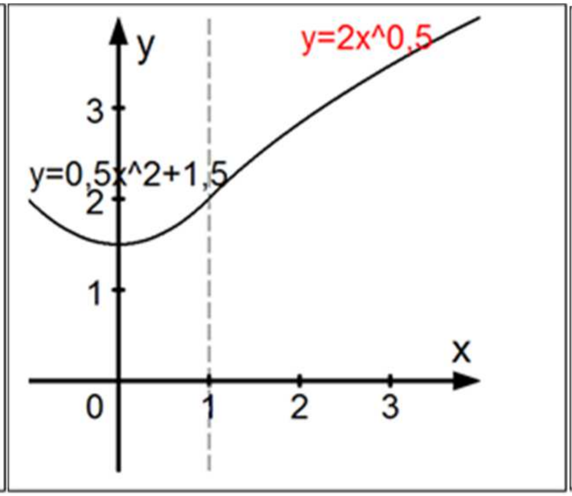
Die Ableitung: Definition

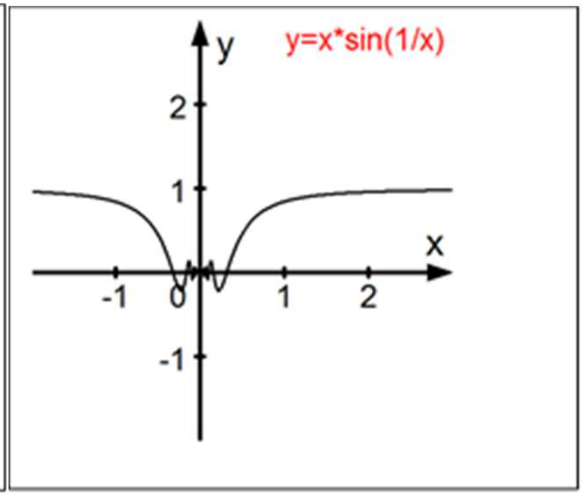
Grundvorstellung: Zeichnen ohne Knick?

Differenzierbar ?

a = 1 a = 1 a = 0







Definition von „allgemein bis reduziert“

A. Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle a$\in$ D, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bzw. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert.

B. Die Funktion f heißt differenzierbar an der Stelle a$\in$ D, wenn

a) a ein Häufungspunkt von D ist.

b) der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bzw. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert.

C. Die Funktion f sei auf einem Intervall J definiert. f heißt differenzierbar an der Stelle a$\in$J, wenn der Grenzwert

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bzw. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert.

Die Ableitung: Definition

A. f heißt differenzierbar an der Stelle $a \in J$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ existiert.

Hier kann a z.B. eine isolierte Stelle sein.

Die Definition bedeutet:

1) Wenn eine Folge $x_n \in D$ gegen a konvergiert, dann existiert $\lim_{x \to a} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$

2) Für alle Folgen, die Nr.1 erfüllen, ist der Grenzwert $\lim_{x \to a} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$ derselbe.

3) Wenn es keine Folge $x_n \in D$ mit Grenzwert a gibt, dann ist Nr.1 und Nr.2 richtig, also f an der Stelle a differenzierbar.

Fachlicher Zugang - Motivation

1) Die Bestimmung der Steigung der Tangente

2) Die Bestimmung der Momentangeschwindigkeit (allgemein der lokalen Änderungsrate)

3) Die Bestimmung der „linearen Fortsetzung“.

Fachlicher Zugang - Tangente

Zu revidierende Grundvorstellungen:

- Tangente bisher nur vom Kreis bekannt; orthogonal zum Radius.
- Tangente wurde bisher konstruiert
- Tangente besitzt mit der „Kurve“ nur einen gemeinsamen Punkt

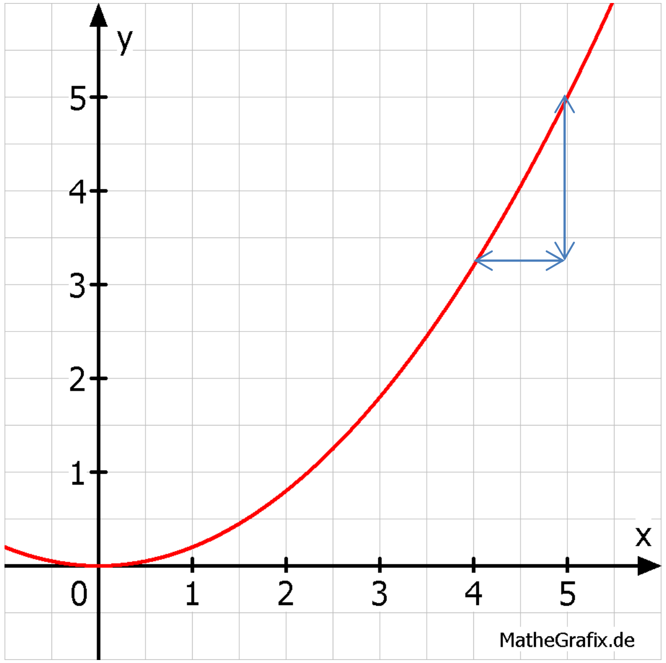
Denkschwierigkeit:

Wie Kann aus einer Sekante (zwei Punkte) eine Tangente entstehen?

Die Existenz der Tangente wird vorausgesetzt, dabei wird sie erst mit der Ableitung definiert.

Der Sch. denkt geometrisch!

Fachlicher Zugang - Tangente



$s(t) = 0{,}2 \cdot t^2$

Differenzenquotient

Zeitintervall [4; t]	s(t)	s(4)	Wegdifferenz $s(t) - s(4)$	Zeitdifferenz $t - 4$	$\frac{s(t) - s(4)}{t - 4}$
[4; 5]	5	3,2	1,8	1	1,8
[4; 4,5]	4,05	3,2	0,85	0,5	1,7
[4; 4,1]	3,362	3,2	0,126	0,1	1,62
[4; 4,01]	3,21602	3,2	0,01602	0,01	1,602
[4; 4,001]	3,2016002	3,2	0,0016002	0,001	1,6002

Fachlicher Zugang - Tangente

Zeitintervall [4; t]	s(t)	s(4)	Wegdifferenz s(t) – s(4)	Zeitdifferenz t – 4	$\frac{s(t) - s(4)}{t - 4}$
[4; 5]	5	3,2	1,8	1	1,8
[4; 4,5]	4,05	3,2	0,85	0,5	1,7
[4; 4,1]	3,362	3,2	0,126	0,1	1,62
[4; 4,01]	3,21602	3,2	0,01602	0,01	1,602
[4; 4,001]	3,2016002	3,2	0,0016002	0,001	1,6002

- Das ist in der Schule der erste Grenzübergang bei Funktionen für $x \rightarrow a$
- Eine neue Zahl entsteht: <u>Nicht</u> durch +, - , · , :
- Jede Zahl in der rechten Spalte ist die Steigung einer Sekante
- Was bedeutet die „Grenzzahl“? Auch eine Steigung?

Fachlicher Zugang - Tangente

Zeitintervall [4; t]	s(t)	s(4)	Wegdifferenz s(t) – s(4)	Zeitdifferenz t – 4	$\frac{s(t) - s(4)}{t - 4}$
[4; 5]	5	3,2	1,8	1	1,8
[4; 4,5]	4,05	3,2	0,85	0,5	1,7
[4; 4,1]	3,362	3,2	0,126	0,1	1,62
[4; 4,01]	3,21602	3,2	0,01602	0,01	1,602
[4; 4,001]	3,2016002	3,2	0,0016002	0,001	1,6002

Definition: Es sei f an der Stelle a differenzierbar.
Dann heißt

- Die Zahl f´(a) <u>Steigung des Graphen an der Stelle a</u>

- Die Gerade durch den Punkt P(a|f(a)) und mit der Steigung f´(a) <u>Tangente an den Graphen von f im Punkt P.</u>

Rechnerische Durchführung

$f(x) = x^2$ mit der x-Methode

Für $x \neq x_o$ gilt:

1. Differenzenquotient an der Stelle x $\qquad \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

2. Der Funktionsterm von f wird eingesetzt $\qquad = \dfrac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0}$

3. Der Bruchterm wird vereinfacht

a) Der Zähler wir als Produkt geschrieben $\qquad = \dfrac{(x-x_0)\cdot(x+x_0)}{x-x_0}$

b) Der Bruchterm wird gekürzt $\qquad = x + x_0$

4.Der Grenzwert des Differenzenquotienten wird bestimmt. $\qquad \lim\limits_{x \to x_0}(x+x_0) = 2x_0$

5. Ergebnis: Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ an der Stelle x_0 ist ist $f´(x_0) = 2x_0$.

Rechnerische Durchführung

$f(x) = x^2$ mit der h-Methode
Für $h \neq 0$ gilt:

1. Differenzenquotient an der Stelle x $\quad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

2. Der Funktionsterm von f wird eingesetzt $\quad = \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

3. Der Bruchterm wird vereinfacht

a) Die Klammer im Zähler wird ausmultipliziert $\quad = \dfrac{(x^2 + 2xh + h^2) - x^2}{h}$

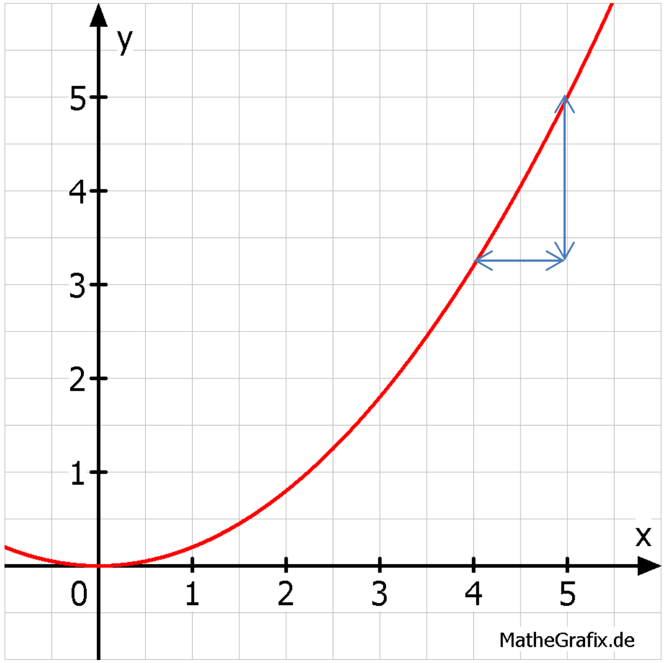
b) Der Zähler wird zusammengefasst $\quad = \dfrac{2xh + h^2}{h}$

c) Der Bruchterm wird gekürzt $\quad = 2x + h$

4.Der Grenzwert des Differenzenquotienten wird bestimmt $\quad \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$

5. Ergebnis: Die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2$ an der Stelle x ist $f'(x) = 2x$.

Fachlicher Zugang - Geschwindigkeit



Ein Körper hat auf einer schiefen Ebene aus der Ruhe nach der Zeit t den Weg s(t) zurückgelegt:

$$s(t) = 0{,}2 \cdot t^2$$

Mittlere Geschwindigkeit im Intervall [t; 4]

Zeitintervall [4; t]	s(t)	s(4)	Wegdifferenz $s(t) - s(4)$	Zeitdifferenz $t - 4$	$\frac{s(t) - s(4)}{t - 4}$
[4; 5]	5	3,2	1,8	1	1,8
[4; 4,5]	4,05	3,2	0,85	0,5	1,7
[4; 4,1]	3,362	3,2	0,126	0,1	1,62
[4; 4,01]	3,21602	3,2	0,01602	0,01	1,602
[4; 4,001]	3,2016002	3,2	0,0016002	0,001	1,6002

Fachlicher Zugang - Geschwindigkeit

Welche Bedeutung hat der Grenzwert

$$\lim_{t \to 4} \frac{s(t) - s(4)}{t - 4} = 1{,}6 \qquad ?$$

Das ist die **Momentangeschwindigkeit** zum Zeitpunkt t = 4.

Fachlicher Zugang - Geschwindigkeit

Was bedeutet „Momentangeschwindigkeit“ anschaulich?

Was bedeutet: Sie sind 100km/h schnell?

- In der nächsten Minute fahren Sie 1667 m ?
- In der nächsten Sekunde fahren Sie 28 m ?

Fachlicher Zugang - Geschwindigkeit

Nein!

Es bedeutet <u>nicht</u>

- Dass Sie in der nächsten Minute 1667 m fahren.
- Dass Sie in der nächsten Sekunde 28 m fahren.