

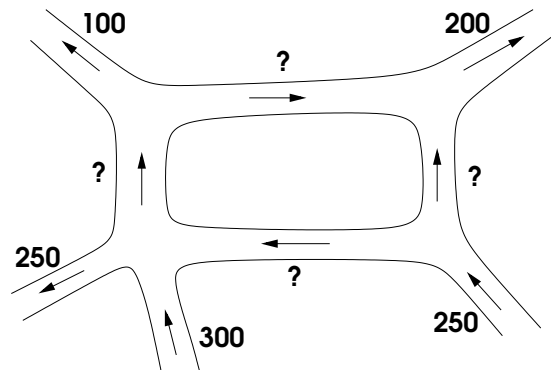
# Mathematik I

## für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 10 (Abgabe am 15.12.2014)

**Aufgabe 46** (10 Punkte)

Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



Was können Sie über die Anzahl Autos sagen, die die vier mit Fragezeichen markierten Straßen benutzten? Bezeichnen Sie dazu diese Anzahlen im Gegenuhrzeigersinn mit  $x_1$  bis  $x_4$ , beginnend mit der unteren Straße. Stellen Sie nun ein lineares Gleichungssystem auf, bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an. Geben Sie außerdem für jede der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an.

**Aufgabe 47**

(10 Punkte)

- a) In Aufgabe 17 haben Sie die ersten Fibonacci-Zahlen  $F_t$  berechnet. Plotten Sie nun mit MATLAB die Verhältnisse  $v_t := F_{t+1}/F_t$  für  $t = 1, \dots, 1000$ .
- b) In Teil a) haben wir mithilfe von MATLAB beobachtet, dass das Verhältnis  $F_n/F_{n-1}$  zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen offensichtlich einem Grenzwert zustrebt. Wir nehmen nun an, dass dieser Grenzwert existiert und nennen ihn  $\alpha$ , d.h.

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}.$$

Bestimmen Sie  $\alpha$  wie folgt:

- Dividieren Sie die Rekursionsvorschrift  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  durch  $F_{n-1}$ .
  - Bilden Sie den Limes  $n \rightarrow \infty$ , um eine Gleichung für  $\alpha$  zu erhalten.
  - Lösen Sie diese (quadratische) Gleichung für  $\alpha$ .
  - Welche der beiden Lösungen ist die richtige und warum?
- c) Zeichnen Sie mit MATLAB in das Diagramm aus Teil a) nun zum Vergleich die waagerechte Gerade  $y = \alpha$  ein.

**Aufgabe 48**

(10 Punkte)

Entscheiden Sie mit Hilfe der Sätze und Beispiele aus der Vorlesung, ob die folgenden Zahlenfolgen konvergieren, und bestimmen Sie ggf. ihre Grenzwerte für  $n \rightarrow \infty$ .

- |                           |  |   |                              |
|---------------------------|--|---|------------------------------|
| a) $\frac{4n}{3n+7}$      | b) $\frac{5n(-1)^n}{3n-4}$                 | c) $\frac{n-7}{2n+(-1)^n}$                            | d) $\frac{-n^2}{1+20n-4n^2}$ |
| e) $\frac{2n+n^4}{n-n^3}$ | f) $\sin\left(\frac{3n\pi-\pi}{2n}\right)$ | g) $\frac{\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$ |                              |

**Aufgabe 49**

(10 Punkte)

Gegeben sei die Funktionenfolge  $f_n(x) = x^{2^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Zeichnen Sie (mit MATLAB oder von Hand) die Graphen von  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_4$  und  $f_8$  für  $|x| \leq 1$ .
- In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{für } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie damit für  $|x| \leq 1$  die Grenzfunktion  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ .

- Für welche  $x$  ist  $f(x)$  stetig?

**Aufgabe 50**

(10 Zusatzpunkte)

Der antike Philosoph Zenon von Elea (490–430 v. Chr.) glaubte die Widersprüchlichkeit der Zeit so beweisen zu können: Achilles (bekannt für seine Schnelligkeit) tritt ein Wettrennen gegen eine Schildkröte an. Die Schildkröte läuft hundertmal langsamer als Achilles, erhält allerdings 10 Meter Vorsprung. Hat Achilles die ersten 10 Meter überwunden, so ist die Schildkröte bereits 10 cm weiter. Hat Achilles auch diese 10 cm zurückgelegt, so ist die Schildkröte doch schon 1 mm weiter und so fort. So kann Achilles die Schildkröte nie einholen.

Womit Zenon nicht rechnete ist, dass eine unendliche Reihe konvergent sein (und damit einen endlichen Wert haben) kann. Bestimmen Sie die Position  $x_0$  der Rennbahn, an der Achilles die Schildkröte überholt, auf zweierlei Weise,

- einmal mit Hilfe der geometrischen Reihe, und
- ein zweites Mal, indem Sie Gleichungen für die Position  $x_A(t)$  des Achilles und die Position  $x_S(t)$  der Schildkröte als Funktion der Zeit aufstellen und den Schnittpunkt aus der Gleichung  $x_A(t) = x_S(t)$  ermitteln.

**Aufgabe 51**

(3 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 18.01.15 auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) die *Skill*

- Understanding sequences.*

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11 (Blatt 3).