Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 14/15

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 13 (Abgabe am 19.01.2015)

Aufgabe 59 (10 Punkte)

Bestimmen Sie (für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$):

a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x^3-1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \log x\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_0^1 4^x\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^5 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 60 (10 Punkte)

Zeigen Sie:

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Hinweis: Verwenden Sie das Additionstheorem des Sinus, um den Integranden durch $\sin(2nx)$ auszudrücken.

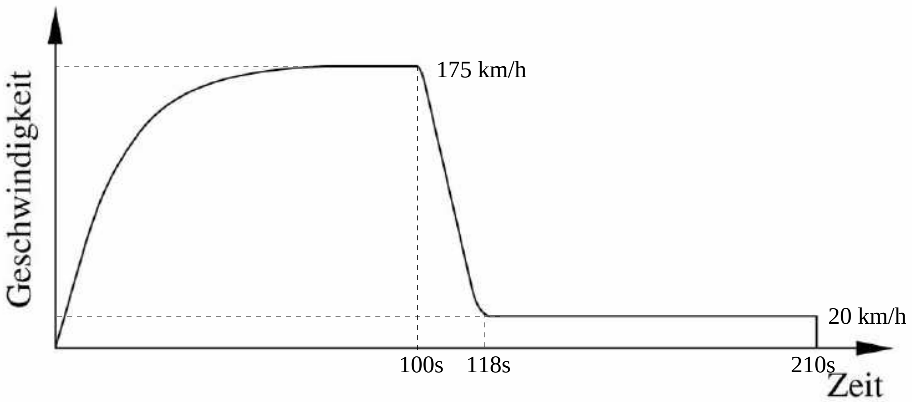
b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$.

Hinweis: Integrieren Sie zweimal partiell.

Aufgabe 61 (10 Punkte)

In der Vorlesung haben wir uns überlegt, dass der untenstehende Graph den Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf bei einem Fallschirmsprung beschreibt.

a) Welche Größe wird durch die Fläche zwischen dem Graph und der Zeitachse beschrieben?
b) Zeichnen Sie ein, wie der Graph verläuft, wenn sich der Fallschirm nicht öffnet.
c) Zu welchem Zeitpunkt erreicht der Fallschirmspringer in diesem Fall den Boden?



Aufgabe 62 (10 Punkte)

Eine Wasserquelle versiegt allmählich. Der Wasseraustritt geht innerhalb von 3 Wochen von $60\,\ell/\mathrm{min}$ auf $2\,\ell/\mathrm{min}$ zurück. Wieviel Wasser ist in dieser Zeit ausgetreten, wenn wir annehmen, dass der Wasseraustritt pro Zeiteinheit als Funktion der Zeit exponentiell abnimmt?

Aufgabe 63 (10 Punkte)

Wir bestimmen die Fourier-Reihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big)$$

der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & , \quad -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ x & , \quad |x| \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & , \quad \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases} \quad \text{, periodisch fortgesetzt.}$$

a) Zeichnen Sie den Graph von f auf $[-\pi, \pi]$ (von Hand oder mit MATLAB).

```
x1=-pi:.01:-pi/2; x2=-pi/2:.01:pi/2; x3=pi/2:.01:pi;
plot(x1,-pi-x1); hold on; plot(x2,x2); plot(x3,pi-x3); hold off
```

b) Begründen Sie, dass $a_0 = 0$.
c) Begründen Sie, dass $a_n = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$.
d) Begründen Sie, dass $b_{2n} = 0 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$.
e) Begründen Sie, dass

$$b_{2n+1} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin\big((2n+1)x\big)\, \mathrm{d}x \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

f) Berechnen Sie die b_{2n+1}.
g) Zeichnen Sie die Funktionen

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} b_{2n+1} \sin\big((2n+1)x\big)\,, \quad N = 0, 1, 2\,,$$

in den Plot aus Teil a ein.

HINWEIS: Für die Aufgabenteile b–e müssen Sie nichts rechnen.

Aufgabe 64 (6 Zusatzpunkte)

Üben Sie bis spätestens 08.02.2015 auf `www.khanacademy.org` die *Skills*

- *Chain rule on two functions* und
- *Visualizing derivatives.*

Je *Skill*, für die Sie am Stichtag den Status *Practiced* oder *Level One* erreicht haben, erhalten Sie 2 Punkte. Für den Status *Level Two* oder *Mastered* schreiben wir 3 Punkte gut.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 11.