Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 14/15

Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Übungsblatt 16 (Abgabe am 09.02.2015)

Aufgabe 72 (Höhenformel) (10 Punkte)
Wir möchten den Luftdruck p als Funktion der Höhe z (in km über Meereshöhe) für die Troposphäre ($z \leq 15$) und für die Stratosphäre ($15 < z \leq 50$) bestimmen. Als Funktion von z erfüllt der Luftdruck die Differenzialgleichung

$$p'(z) = -\frac{Mg}{R\,T(z)}\,p(z)\,.$$

Dabei ist $M = 0,029\,\mathrm{kg/mol}$ die mittlere molare Masse von Luft, $g = 9{,}81\,\mathrm{N/kg}$ die Erdbeschleunigung, $R = 8,31\,\mathrm{N\,m/(K\,mol)}$ die ideale Gaskonstante und $T(z)$ die Lufttemperatur in der Höhe z.

Wir nehmen folgenden Temperaturverlauf an: Bei $z = 0$ betrage die Temperatur $20\,°\mathrm{C} = 293\,\mathrm{K}$. Innerhalb der Troposphäre ($z \leq 15$) falle die Temperatur linear ab, jeweils um $6{,}5\,\mathrm{K}$ pro Kilometer. Zu Beginn der Stratosphäre ($15 < z \leq 30$) sei die Temperatur konstant. Innerhalb der Ozonschicht ($30 < z \leq 50$) erwärme sie sich wieder linear und betrage in $50\,\mathrm{km}$ Höhe $0°\mathrm{C} = 273\,\mathrm{K}$.

Der Luftdruck auf Meereshöhe betrage $1013\,\mathrm{mbar}$.

a) Zeichnen Sie den Graph des Temperaturverlaufs $T(z)$ für $0 \leq z \leq 50$ (z in km) und geben Sie die Funktion in der Form

$$T(z) = \begin{cases} \ldots\ , & 0 \leq z \leq 15 \\ \ldots\ , & 15 \leq z \leq 30 \\ \ldots\ , & 30 \leq z \leq 50 \end{cases} \qquad \text{an.}$$

b) Bestimmen Sie nun den Druckverlauf $p(z)$ für $0 \leq z \leq 50$. Gehen Sie dazu wie folgt vor:
   (i) Lösen Sie zunächst die Differenzialgleichung für $p(z)$ im Bereich $0 \leq z \leq 15$.
   (ii) Wählen Sie die freie Konstante so, dass Sie den richtigen Druck auf Meereshöhe erhalten.
   (iii) Bestimmen Sie den Luftdruck in $15\,\mathrm{km}$ Höhe.
   (iv) Lösen Sie die Differenzialgleichung für $p(z)$ im Bereich $15 \leq z \leq 30$.
   (v) Wählen Sie die freie Konstante so, dass Sie den richtigen Druck in $15\,\mathrm{km}$ Höhe erhalten.
   (vi) Wiederholen Sie die Schritte analog für den Bereich $30 \leq z \leq 50$.

Hinweis: Es ist evt. sinnvoll, die Größe $\alpha := Mg/R$ einzuführen.
Welchen Wert hat α in K/km?

Aufgabe 73 (10 Punkte)

Sei $N(t)$ die Anzahl der Individuen einer Fischpopulation zur Zeit t (in Jahren). Weiter seien die (pro Kopf-) Geburtenrate $g > 0$ und die Sterberate $s > 0$ Konstanten. Dann gilt

$$\frac{\mathrm{d}N}{dt} = gN - sN\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung lautet $N(t) = e^{(g-s)t}N(0)$ (exponentielles Wachstum), mit beliebigem $N(0)$. Die Größe $g - s$ heißt auch *Wachstumsrate*. (Vergleichen Sie auch mit Aufgabe 19.)

Der Mensch entnehme nun im Zeitintervall $[t, t+\mathrm{d}t]$ die Menge $a\big(1+\cos(2\pi t)\big)N(t)$, $a > 0$, z.B. durch je nach Jahreszeit unterschiedlich intensives Fischen (wobei der Ertrag immer proportional zur Populationsgröße ist). Die Population erfüllt nun also die DGL

$$\dot{N} = gN - sN - a\big(1 + \cos(2\pi t)\big)N\,. \tag{$*$}$$

a) Zeigen Sie, dass

$$N(t) = b\mathrm{e}^{wt - v\sin(2\pi t)} \tag{$+$}$$

die DGL löst, wenn man nur w und v geeignet wählt, d.h. geben Sie w und v als Funktion von g, s und a an, so dass $(+)$ eine Lösung von $(*)$ ist.

b) Welche Werte darf dabei b annehmen? Welche anschauliche Bedeutung hat b?

c) Welche Beziehung muss zwischen g, s und a erfüllt sein, damit die Population um einen Mittelwert oszilliert aber langfristig weder wächst noch schrumpft?

d) Wie groß wird die Population dann maximal und minimal (als Funktion von b, g, s und a) und zu welchen Zeiten? Vergleichen Sie diese Zeiten mit den Zeiten größter und kleinster Fischerei-Intensität (Skizze).

Aufgabe 74 (Populationsmodell von Lotka und Volterra) (10 Zusatzpunkte)
Wir simulieren die Entwicklung zweier Tier-Populationen N (Beute) und P (Räuber) als Funktion der Zeit t. $N(t)$ und $P(t)$ sind jeweils die Anzahl der Individuen (in Millionen) zum Zeitpunkt t. Lotka und Volterra schlugen unabhängig voneinander folgende gekoppelten Differenzialgleichungen als Modell der zeitlichen Entwicklung vor:

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP)\,, \quad \frac{dP}{dt} = P(cN - d)\,. \tag{A}$$

Dabei sind a, b, c, d positive Konstanten. Das Modell (A) beruht auf folgenden Annahmen: Pro Beutetier und Zeiteinheit ist die Anzahl der Geburten minus natürliche Todesfälle durch a gegeben, während die Anzahl bP der Todesfälle durch Gefressenwerden proportional zur Anzahl der Raubtiere P ist. Pro Raubtier und Zeiteinheit vermehren sich die Raubtiere um $cN - d$; dieser Betrag wächst mit der verfügbaren Nahrung und würde in Abwesenheit jeglicher Beute $-d$ betragen.

Die Parameter unseres Modells seien $a = 0{,}5$, $b = 0{,}2$, $c = 0{,}4$ und $d = 0{,}6$. Stellen Sie N und P als Funktion der Zeit ($t \in [0, 50]$) für die drei verschiedenen Anfangswerte $(N(0); P(0)) = (1; 1)$, $(3; 0{,}6)$ und $(2; 3)$ jeweils in einem Diagramm graphisch dar. Gehen Sie dazu wie im untenstehenden Beispiel vor. Dabei verwenden wir einen speziellen MATLAB-Befehl zur numerischen Lösung von Differenzialgleichungen, einen sogenannten *Integrator* oder *Solver*.

Plotten Sie außerdem für jeden der 3 genannten Anfangswerte die so errechneten Wertepaare $(N(t), P(t))$ in ein weiteres Diagramm, das die *Bahn* des Verlaufs in der NP-Ebene (dem sogenannten *Zustands-* oder *Phasenraum*) zeigt. (Im untenstehenden Beispiel würde der entsprechende Befehl `plot(y(:,1),y(:,2))` lauten.)

Beispiel 11: Zu lösen seien die gekoppelten Differenzialgleichungen (gedämpftes Pendel)

$$\frac{dy_1}{dt} = -\beta y_1 + y_2\,, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\omega^2 y_1\,, \tag{B}$$

mit bestimmten Koeffizienten β und ω, $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = .5$. Wir schreiben nun eine Funktion `pendel.m`, die diese Differenzialgleichung enthält:

```
function [dy]=pendel(t,y)
dy=zeros(2,1);
omega=2;
beta=0.1;
dy(1)=y(2)-beta*y(1);
dy(2)=-omega^2*y(1);
end
```

Anschließend geben wir folgende Befehle direkt ein:

```
» t=0:.1:50;
» y0=[1; .5];
» [t,y]=ode45('pendel',t,y0);
» plot(t,y);
```

`ode45('pendel',t,y0)` berechnet die Lösungen y_i von (B) numerisch. Die Ausgabe erfolgt in Form einer Matrix `y`, deren i-te Spalte die Funktionswerte von $y_i(t)$ im Intervall $[0, 50]$ enthält.