Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 14/15

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Klausur am 16.02.2015

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

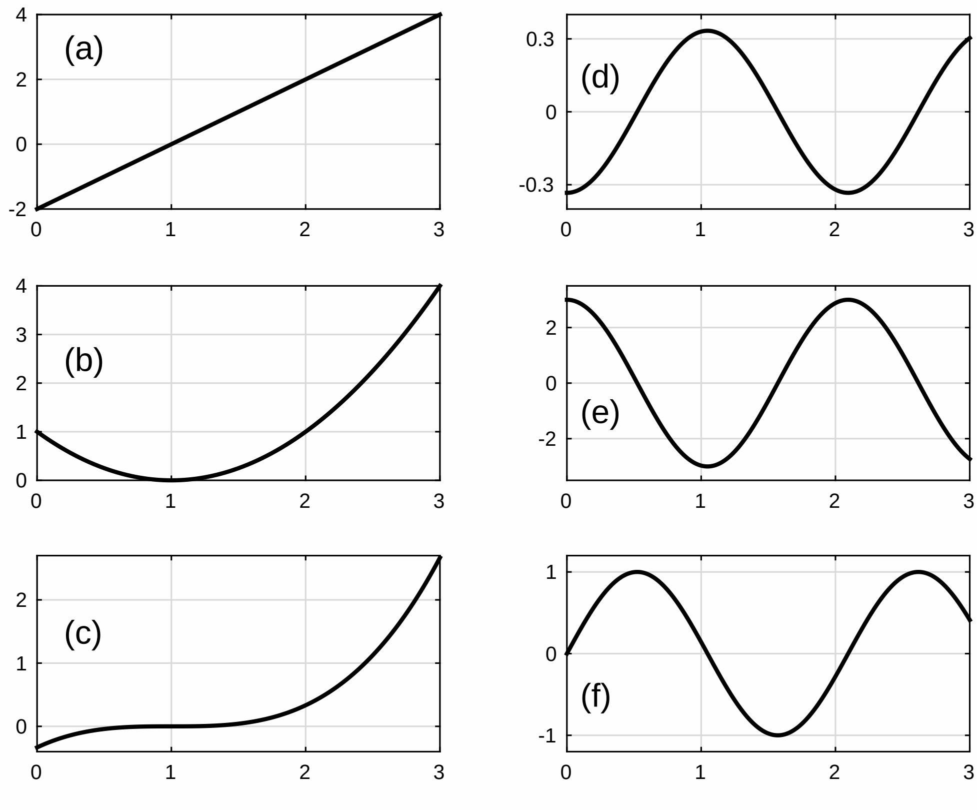
Es sind maximal 92 Punkte erreichbar, 74 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 37 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (12 Punkte)

In den Diagrammen (a)–(c) sind die Graphen einer Funktion f, ihrer Ableitung f' und einer ihrer Stammfunktionen F (d.h. $F' = f$) dargestellt. Analog in den Diagrammen (d)–(f) für eine Funktion g, ihre Ableitung g' und eine ihrer Stammfunktionen G. Nur was ist was? Ordnen Sie zu!

Für jede richtige Zuordnung erhalten Sie zwei Punkte, für jede falsche Zuordnung ziehen wir zwei Punkte ab. Unbearbeitete Teilaufgaben geben weder Plus- noch Minuspunkte. Sollte sich insgesamt eine negative Punktzahl für die Gesamtaufgabe ergeben, so wird sie mit Null Punkten gewertet.



Aufgabe 2 (6+1+3+2+2+3 = 17 Punkte)

In einer isolierten Gnurpenkolonie bricht die Gnurpengrippe aus. Jede Woche erkranken 70% der zuvor gesunden Tiere. Von den kranken Tieren sterben wöchentlich 20%, wohingegen 10% wieder gesund werden.

Tiere, die die Erkrankung überlebt haben, erkranken mit der gleichen Wahrscheinlichkeit nochmals an der Gnurpengrippe wie durchgängig gesunde Tiere. Im Beobachtungszeitraum werden keine Gnurpen geboren und alle Todesfälle werden durch die Gnurpengrippe verursacht.

Sei t die Zeit in Wochen. Wir bezeichnen mit G_t, K_t und T_t jeweils die Anzahl der zur Zeit t gesunden, kranken und toten Tiere. Damit ergibt sich das Populationsmodell

$$\vec{N}_{t+1} = W\,\vec{N}_t \qquad \text{mit} \qquad W = \begin{pmatrix} 0{,}3 & \square & \square \\ \square & \square & 0 \\ \square & 0{,}2 & \square \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{N}_t = \begin{pmatrix} G_t \\ K_t \\ T_t \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die vollständige Übergangsmatrix W an.

Zur Zeit $t = 0$ leben in der Kolonie 1100 Gnurpen, von denen 100 erkrankt sind, aber noch keine gestorben ist.

b) Geben Sie $\vec{N}_0$ an.

c) Berechnen Sie $\vec{N}_1$.

Der Populationsvektor zur Zeit $t = 0$ sei in MATLAB als `N` eingegeben, die Übergangsmatrix als `W`. Sie führen folgende Befehle aus:

```
>> W^(-1)*N

ans =

   4928.57
  -4785.71
    957.14

>> W*5*N

ans =

   1550
   3850
    100
```

```
>> W.^5*N

ans =

   2.4310e+00
   1.8488e+02
   3.2000e-02

>> W\N

ans =

   4928.57
  -4785.71
    957.14
```

```
>> W^5*N

ans =

    85.076
   451.612
   563.312
```

d) Wieviele der Tiere sind nach 5 Wochen verstorben? (Runden Sie ggf. sinnvoll.)

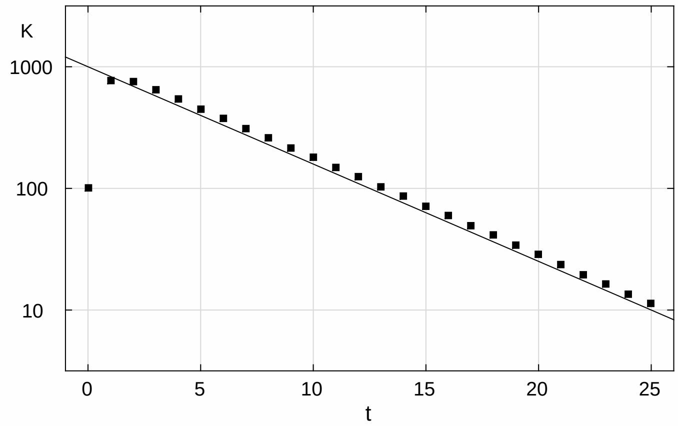
e) Wieviele gesunde Gnurpen gibt es nach 5 Wochen in der Kolonie? (Runden Sie ggf. sinnvoll.)

f) Funktioniert unser Modell auch für negative t? Begründen Sie Ihre Antwort in maximal zwei Sätzen. Verweisen Sie dabei auf die MATLAB-Ausgabe.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

(Fortsetzung von Aufgabe 2 – kann aber unabhängig bearbeitet werden)

Im folgenden Diagramm ist die Anzahl kranker Tiere K gegen die Zeit t aufgetragen.



Für $t > 0$ lässt sich die Entwicklung ungefähr durch die eingezeichnete Gerade beschreiben. Geben Sie die Funktion $K(t)$ an, die dieser Geraden entspricht. Lesen Sie dazu zwei Punkte auf der Geraden ab. Beachten Sie die logarithmische Einteilung der K-Achse.

Aufgabe 4 (1+1+2+2+2+6 = 14 Punkte)

Unter guten Bedingungen vermehren sich Gnurpen rasant, ihre Anzahl vervierfacht sich dann jährlich. Momentan ($t = 0$) leben in einer Gnurpenkolonie hundert Tiere unter idealen Bedingungen. Sei N die Anzahl der Gnurpen und t die Zeit in Jahren.

a) Wieviele Tiere werden es in zwei Jahren sein?
b) Wieviele Tiere waren es vor einem halben Jahr?
c) Geben Sie die Anzahl der Gnurpen als Funktion der Zeit in der Form $N(t) = N_0\, a^t$ an (d.h. wählen Sie passende Parameter N_0 und a).
d) Wann leben 3 200 Gnurpen in der Kolonie?
e) Die Anzahl der Gnurpen erfüllt als Funktion der Zeit die Differenzialgleichung $\dot{N}(t) = \gamma\, N(t)$. Welchen Wert hat γ?
f) Wir betrachten nun eine Gnurpenkolonie von momentan hundert Tieren, die – unter ansonsten idealen Bedingungen – auf einer Insel leben, auf der es nur Platz und Nahrung für maximal 1000 Gnurpen gibt. Damit erfüllt die Anzahl der Gnurpen nun die Differenzialgleichung

$$\dot{N}(t) = \frac{\gamma}{1000} N(t)\big(1000 - N(t)\big)\,.$$

Wie muss man den Parameter C in

$$N(t) = \frac{1000}{1 + B\mathrm{e}^{-Ct}}$$

wählen, damit N die Differenzialgleichung löst?
Welchen Wert hat B für die betrachtete Kolonie?

Aufgabe 5 (5+5+4 = 14 Punkte)

Wir mischen den perfekten Fruchtquark. Dafür verwenden wir Quark und Früchte. Pro 100g enthält der Quark 4g Zucker. Die Früchte enthalten dagegen 8g Zucker pro 100g.

Unser Fruchtquark soll folgenden Anforderungen genügen:

- Er soll mindestens 100g Früchte enthalten.
- Er soll höchstens 7% Zucker enthalten.
- Insgesamt möchten wir zwischen 300g und 500g Fruchtquark herstellen.

Bezeichnen Sie mit x die Quarkmenge in Vielfachen von 100g (d.h. $x = 1{,}3$ entspricht 130g Quark). Analog sei y die Früchtemenge, ebenfalls in Vielfachen von 100g.

a) Drücken Sie die Bedingungen, die unser Fruchtquark erfüllen muss, jeweils als Ungleichung in x und y aus.
b) Kennzeichnen Sie in einem xy-Diagramm ($0 \leq x, y \leq 5$) den Bereich, in dem alle Bedingungen erfüllt sind.
c) Von unserem Fruchtvorrat möchten wir möglichst viel verwenden. Wie muss der Fruchtquark zusammengestellt sein, damit er allen Bedingungen genügt und dabei die Fruchtmenge maximiert wird?
Identifizieren Sie den entsprechenden Punkt in Ihrem Diagramm und berechnen Sie seine Koordinaten.

Aufgabe 6 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

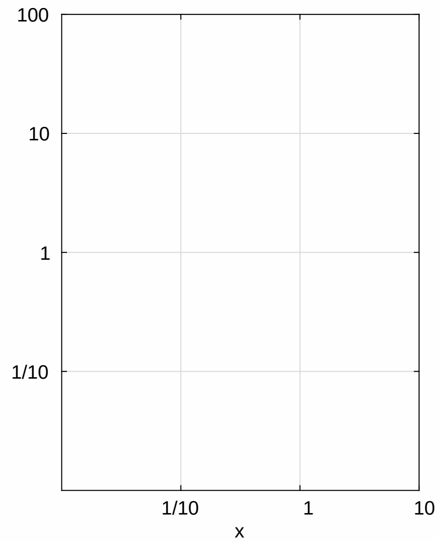
Übertragen Sie das nebenstehende (doppeltlogarithmische) Diagramm auf Ihr Blatt und zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen ein.

a) $f_a(x) = 10 \cdot x^2$

b) $f_b(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{10}$

c) $f_c(x) = \dfrac{1}{x}$

d) $f_d(x) = \dfrac{1}{\sqrt{100\,x}}$



Aufgabe 7 (6 Punkte)

Seien $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{u}| = 5$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, und sei $\vec{v}$ ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ferner gelte $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$. Bestimmen Sie $|\vec{v}|$.

Aufgabe 8 (3+3+3 = 9 Punkte)

Berechnen Sie:

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

HINWEIS: Integrieren Sie bei (c) partiell, leiten Sie dabei die Funktion $x \mapsto x$ ab.