Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 14/15

Mathematik I
für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Nachklausur am 30.03.2015

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 92 Punkte erreichbar, 74 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 37 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (2+2+2+2+5 = 13 Punkte)

Ein Vogel fliegt 10 min lang mit einer Geschwindigkeit von 9 m/s über Grund nach Südosten. Danach fliegt er 5 min lang nach Süden. Während der gesamten Zeit weht ein konstanter Wind mit 4 m/s aus Nordwesten. Gegenüber der ihn umgebenden Luft bewegt sich der Vogel die ganze Zeit mit der gleichen Geschwindigkeit.

Wählen Sie ein Koordinatensystem dessen x_1-Achse nach Osten und dessen x_2-Achse nach Norden zeigt. Bezeichnen Sie mit $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ die Vektoren der Fluggeschwindigkeit (über Grund) auf den beiden Teilstücken, mit $\vec{w}$ den Vektor der Windgeschwindigkeit sowie mit $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ die Geschwindigkeitsvektoren gegenüber der umgebenden Luft (alles in m/s).

a) Geben Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_1$ (Vogel über Grund auf dem ersten Teilstück) an.
b) Geben Sie den Vektor $\vec{w}$ der Windgeschwindigkeit an.
c) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{v}_2/|\vec{v}_2|$ (Vogel über Grund auf dem zweiten Teilstück) an.
d) Wie schnell bewegt sich der Vogel gegenüber der ihn umgebenden Luft?
e) Mit welcher Geschwindigkeit (über Grund) fliegt der Vogel Richtung Süden (auf dem zweiten Teilstück)?

Aufgabe 2 (3+3 = 6 Punkte)

Für einen Fruchtquark mischen Sie x Volumeneinheiten (VE) pürierte Früchte (mit 8% Zucker) und y VE Quark (mit 4% Zucker).

a) Wieviel Prozent Zucker enthält der Fruchtquark?
   Hinweis: Das Ergebnis ist eine Funktion von x und y.
b) Falls Ihr Fruchtquark höchstens dreimal so viel Quark wie Früchte enthält, wieviel Prozent Zucker enthält er dann mindestens?

Aufgabe 3 (4+2 = 6 Punkte)

Bei einer Geschwindigkeit vom 100km/h liegt der Benzinverbrauch von Annes Auto bei 5ℓ pro 100km; bei 150km/h sind es 8ℓ pro 100km. Anne fährt zunächst 50km mit 100km/h und dann 50km mit 150km/h.

a) Wie groß ist Annes Durchschnittsgeschwindigkeit?
b) Wie groß ist ihr durchschnittlicher Verbrauch?

Aufgabe 4 (3+3+3+3 = 12 Punkte)

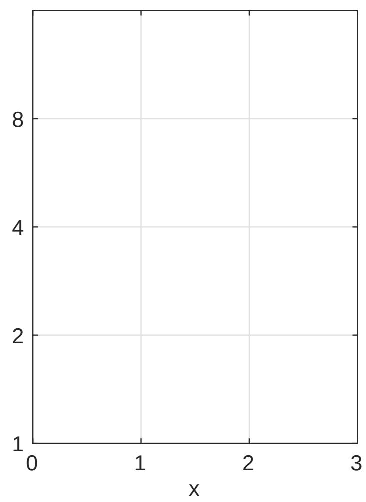
Übertragen Sie das nebenstehende (einfach logarithmische) Diagramm auf Ihr Blatt und zeichnen Sie die Graphen der folgenden Funktionen ein.

a) $f_a(x) = \dfrac{16}{2^x}$

b) $f_b(x) = \sqrt{2^x}$

c) $f_c(x) = 2^{2x-1}$

d) $f_d(x) = 4 \cdot 2^{-x/2}$



Aufgabe 5 (4 Punkte)

Hannah ist doppelt so alt wie Rudi. Vor fünf Jahren war Hannah noch dreimal so alt wie Rudi. Wie alt ist Hannah jetzt?
Hinweis: Bezeichnen Sie das momentane Alter von Hannah mit h, das von Rudi mit r. Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie dieses.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Notieren Sie zu den Buchstaben (a)–(e) jeweils ein **W** für "wahr" oder ein **F** für "falsch" (ohne Begründung). Für jede richtige Antwort erhalten Sie **zwei** Punkte, für jede falsche werden **zwei** Punkte abgezogen. Sollte sich so eine negative Punktzahl ergeben, so wird die Aufgabe mit Null Punkten gewertet.

Die Gerade $y = x$ ist die Regressionsgerade (wobei wir, wie üblich y als Funktion von x betrachten) zu den drei Punkten...

a) $(-1,-1)$, $(1,0)$, $(1,2)$.
b) $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$.
c) $(-1,-1)$, $(0,0)$, $(1,1)$.
d) $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$.
e) $(0,-1)$, $(0,1)$, $(1,1)$.

Aufgabe 7 (3+3 = 6 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie AB sowie $B^T A$.

Aufgabe 8 (9+2+2+2 = 15 Punkte)

Gnurpwale werden mit vier Jahren geschlechtsreif. Ab diesem Alter gebären die Weibchen im Mittel jährlich ein Kalb; die Hälfte der Kälber sind weiblich. 21% der Kälber sterben, bevor sie 2 Jahre alt sind. Unter älteren Walen (2 Jahre und älter) sterben in einem Zeitraum von zwei Jahren stets 13% der Tiere.

Wir beschreiben die Gnurpwal-Population zur Zeit t durch den Vektor

$$\vec{N}^{(t)} = \begin{pmatrix} N_1^{(t)} \\ N_2^{(t)} \\ N_3^{(t)} \end{pmatrix} .$$

Dabei sei N_1 die Anzahl weiblicher Jungtiere (jünger als 2 Jahre), N_2 die Anzahl weiblicher Wale, die mindestens zwei Jahre aber weniger als vier Jahre alt sind, und N_3 sei die Anzahl weiblicher Wale, die mindestens vier Jahre alt sind. Es ergibt sich das Populationsmodell

$$\vec{N}^{(t+1)} = L\,\vec{N}^{(t)} ,$$

wobei die Zeit t in Einheiten von 2 Jahren gemessen wird.

a) Geben Sie die Leslie-Matrix L an.

Die momentane Gnurpwal-Population sei in MATLAB als Vektor `N` eingegeben, die Leslie-Matrix als `L`. Sie führen folgende Befehle aus:

```
>> L*N

ans =

   1000
    790
   1740

>> L^2*N

ans =

   1740.00
    790.00
   2201.10
```

```
>> L.^2*N

ans =

   1000.00
    624.10
   1513.80

>> L^4*N

ans =

   2602.3
   1738.9
   3459.9
```

```
>> L\N

ans =

   1265.82
    149.43
   1000.00

>> L^(-1)*N

ans =

   1265.82
    149.43
   1000.00
```

b) Wieviele weibliche Jungtiere (jünger als 2 Jahre) gibt es in 2 Jahren?

c) Wieviele mindestens 4 Jahre alte weibliche Gnurpwale gibt es in 4 Jahren?

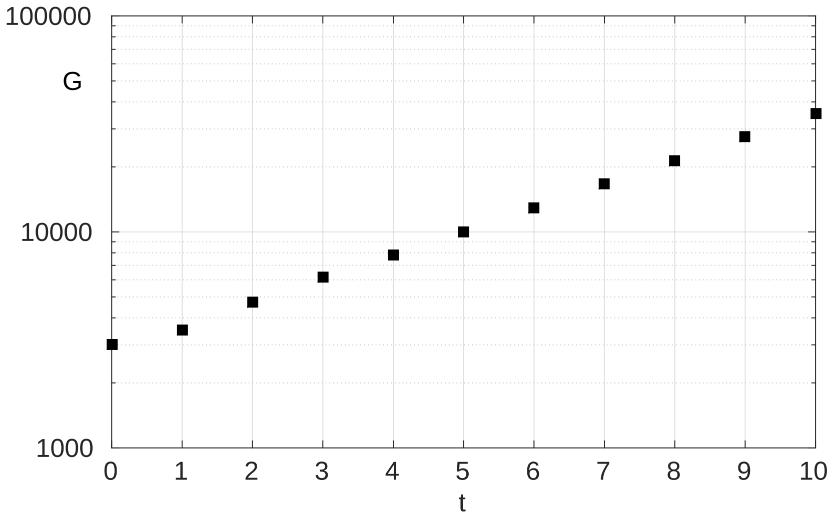
d) Wieviele weibliche Jungtiere (jünger als 2 Jahre) gab es vor 2 Jahren?

Runden Sie ggf. sinnvoll.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

(Fortsetzung von Aufgabe 8 – kann aber unabhängig bearbeitet werden)

Im folgenden Diagramm ist die Gesamtzahl der (weiblichen) Gnurpwale G gegen die Zeit t aufgetragen.



Die Population scheint näherungsweise exponentiell zu wachsen, d.h. $G(t) = G(0) \cdot \alpha^t$. Bestimmen Sie α.

Aufgabe 10 (4+2+2+2+4 = 14 Punkte)

Der Luftdruck p erfüllt als Funktion der Höhe z über dem Meerespiegel die Differenzialgleichung

$$p'(z) = -\frac{\alpha}{T(z)}\, p(z)\,.$$

Dabei ist $\alpha = 34\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}}$ eine Konstante und $T(z)$ die Temperatur in der Höhe z.

a) Wir nehmen an, die Temperatur habe, unabhängig von z, den konstanten Wert $T_0 = 272\,\mathrm{K}$ (also knapp unter 0° C).

  (i) Wie muss die Konstante λ gewählt werden, damit

$$p(z) = C\mathrm{e}^{-\lambda z}$$

  die Differenzialgleichung löst? (HINWEIS: $8 \cdot 34 = 272$)

  (ii) Wie muss außerdem C gewählt werden, damit der Luftdruck in Meereshöhe 1013 mbar beträgt?

  (iii) In welcher Höhe z_0 ist der Luftdruck auf den halben Ausgangswert, d.h. auf 506, 5 mbar abgefallen?

  (iv) Welcher Luftdruck herrscht in der Höhe $2z_0$ (mit z_0 aus (iii))?

b) Nun nehmen wir an, dass

$$T(z) = T_0 - \gamma z \qquad \text{mit} \qquad \gamma = 6{,}8\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}}\,,$$

d.h. dass die Temperatur linear mit der Höhe abnimmt. Wie muss die Konstante β gewählt werden, damit

$$p(z) = C(T_0 - \gamma z)^{\beta}$$

die Differenzialgleichung löst?