Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Vektorrechnung

Stefan Keppeler

17. November 2014

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

- Vektoren werden zur Darstellung gerichteter Größen verwendet.
- Man stelle sich also einen Pfeil in eine bestimmte Richtung mit einer bestimmte Länge (Betrag) vor.

Zum Rechnen:

Darstellung durch Komponenten in kartesischen Koordinaten,

$$\vec{u} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \quad u_i \in \mathbb{R} \quad \text{(Spaltenvektor)}$$

...oder Zeilenvektor: $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

Notation: Oft auch $\boldsymbol{u}$ statt $\vec{u}$ oder einfach u für Vektoren im $\mathbb{R}^n$

Definition: Der Betrag oder die Norm eines Vektors $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ ist

$$|\vec{u}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}.$$

(stimmt überein mit dem Abstand des Punktes mit Koordinaten $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vom Ursprung.)

Definition: Die Summe zweier Vektoren $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ und $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ im $\mathbb{R}^n$ ist komponentenweise erklärt,

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$$

Geometrische Bedeutung: Parallelogrammaddition

- **Geschwindigkeiten** addieren sich vektoriell, z.B. gehende Person auf Schiff.
- **Translationen** addieren sich vektoriell, z.B. Fahrt von Tübingen nach Ulm, via Stuttgart
- Mittelung von **Richtungen**:
  Himmelsrichtung in die ein Zugvogel morgens losfliegt, repräsentiert durch einen Vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ mit $|\vec{u}| = 1$.
  Mittelung der Winkel? Oder über Vektoraddition?

$$\overline{\vec{u}} = \frac{1}{N}\left(\vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_N\right)$$

- **Addition von Kräften:** Elektrisch geladene Teilchen (z.B. Elektronen, Ionen, Staubkörner), nummeriert von 1 bis N.
  - Kraft auf Teilchen Nr. i:

$$\vec{K}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{K}_{ij} \quad \text{(Vektorsumme)}$$

$\vec{K}_{ij}$: Kraft, die Teilchen Nr. j auf Teilchen Nr. i ausübt (elektrostatische Anziehungs- oder Abstoßungskraft).

  - $\vec{K}_{ij}$ zeigt nach Coulombschen Gesetz in Richtung der Verbindungslinie zwischen den Teilchen i und j; Betrag

$$|\vec{K}_{ij}| = \frac{q_i q_j}{d(\vec{x}_i, \vec{x}_j)^2}\,, \qquad d(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = |\vec{x}_i - \vec{x}_j|\,,$$

wobei $q_i \in \mathbb{R}$ die Ladung und $\vec{x}_i \in \mathbb{R}^3$ die Position von Teilchen i ist.

Rechenregeln: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ (Vektoren)

- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (Kommutativität)
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (Assoziativität)
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u} \quad \forall\ \vec{u}$, wobei $\vec{0} = (0, \dots, 0)$
  (Existenz eines neutralen Elements, "Nullvektor")
- $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ wobei $-\vec{u} = (-u_1, \dots, -u_n)$
  (Existenz des additiv-inversen, "das Negative von $\vec{u}$")

Beispiele:

- Das Negative $-\vec{u}$ eines Geschwindigkeitsvektors entspricht der Bewegung in die entgegengesetzte Richtung mit (betragsmäßig) gleicher Geschwindigkeit.
- Eine Punktspiegelung am Ursprung bildet jeden Vektor auf sein Negatives ab.

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Definition: Das α-fache eines Vektors $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ ist definiert als der Vektor

$$\alpha\vec{u} = (\alpha u_1, \ldots, \alpha u_n)\,.$$

Die so definierte Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Skalarmultiplikation.

Beispiele:

- Zentrische Streckung um Faktor $\alpha > 0$ bildet jeden Punkt/Vektor auf sein α-faches ab.
- Kraft $=$ Masse $\cdot$ Beschleunigung.
- $\vec{u} \neq \vec{0}$ und $\alpha\vec{u}$ für $\alpha > 0$ zeigen in dieselbe Richtung, $\vec{u} \,\|\, \alpha\vec{u}$.
- Falls $\vec{u} \,\|\, \vec{v}$, dann $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \alpha\vec{u}$
- Richtung von $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, gegeben durch Einheitsvektor

$$\vec{e} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

(gleiche Richtung wie $\vec{u}$ aber Betrag 1)

Rechenregeln: $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ (Vektoren), $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Skalare)

- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
- $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$ (zwei Distributivgesetze)
- $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$ (Assoziativität)
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ (neutrales Element der Multiplikation)
- $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
- $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$.

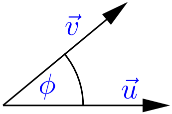
Beachte: Man multipliziert hier einen Vektor mit einem Skalar, nicht mit einem anderen Vektor! Man kann durch einen Skalar $\alpha \neq 0$ dividieren (indem man mit α^{-1} multipliziert), aber man kann nicht durch einen Vektor dividieren!

Definition: Das (kanonische) Skalarprodukt ist eine Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, für $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\vec{u} \cdot \vec{v} := u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$$

Beispiel:

- offensichtlich gilt $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
- **Rechenregeln:** $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ (Vektoren), $\alpha \in \mathbb{R}$ (Skalar)
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
  - $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$
  - $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- anschaulich: Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\phi$$

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN