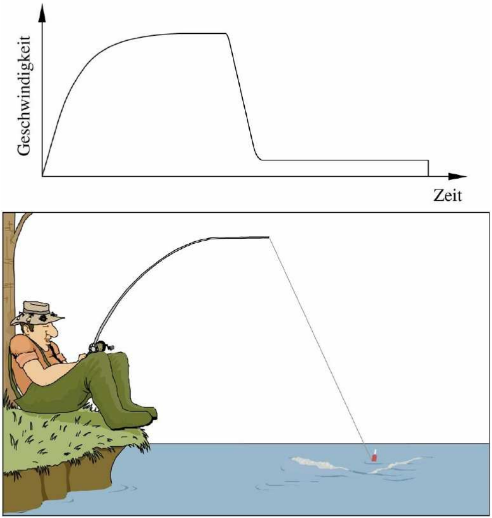
Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Differenzialrechnung

Stefan Keppeler

15. Dezember 2014

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN



Welche Sportart passt zu diesem Graphen?

- Angeln
- Stabhochsprung
- 100m-Lauf
- Fallschirmspringen
- Golf
- Speerwerfen
- Hochsprung
- Turmspringen
- Drag Racing
- Wasserski

nach W. Herget, http://did.mathematik.uni-halle.de/lehrerseite

Definition: Die Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}^d$ heißt differenzierbar im Punkt $x \in (a, b)$, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Dieser Wert heißt der Differenzialquotient oder die (erste) Ableitung von f in x.

- Ist f auf dem gesamten Definitionsbereich $D = (a, b)$ differenzierbar, so heißt die dadurch definierte Funktion $f' : D \to \mathbb{R}^d$ die (erste) Ableitung von f.
- Ist f' wiederum auf ganz D differenzierbar, so heißt die Ableitung von f' die zweite Ableitung von f, f''.
- Ist f'' auch auf ganz D differenzierbar, so heißt die Ableitung von f'' die dritte Ableitung von f, f''', und so weiter.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, **Tangente in** $x_0\in(a,b)$**:**

$$T(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

Tangente T als Näherungsfunktion für f in der Nähe von x.

Anwendung: Größtfehlerabschätzung

- gemessen: x mit Ungenauigkeit δx
- gesucht: Wert der Größe $y=f(x)$ mit Ungenauigkeit δy
- näherungsweise: $\delta y=|f'(x)|\,\delta x$.

Beispiel: ein punktförmiges Objekt befinde sich zur Zeit t am Ort $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^d$

- $\vec{x} : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ heißt Kurve im $\mathbb{R}^d$
- mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[a, b]$

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\vec{x}(b) - \vec{x}(a)}{b - a}$$

- (Momentan-)Geschwindigkeit zur Zeit $t \in [a, b]$

$$\vec{v}(t) = \vec{x}\,'(t)$$

- **Notation:** Zeitableitung mit Punkt statt Strich, $\dot{\vec{x}}$ statt $\vec{x}\,'$
- Betrag der Geschwindigkeit: $|\dot{\vec{x}}(t)|$
- Bewegungsrichtung: Einheitsvektor in Richtung von $\dot{\vec{x}}(t)$,

$$\vec{e}_{\dot{\vec{x}}(t)} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|}.$$

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

zweite Ableitung $\ddot{f}(t)$: Beschleunigung
Änderung des Geschwindigkeitsvektors $\dot{f}(t)$ mit der Zeit

Bedeutung von $f(t)$	Bezeichnung für $\dot{f}(t)$
Position $[\mathrm{m}]$	Geschwindigkeit $[\mathrm{m}/\mathrm{s}]$
Geschwindigkeit $[\mathrm{m}/\mathrm{s}]$	Beschleunigung $[\mathrm{m}/\mathrm{s}^2]$
Winkel $[\ ]$	Winkelgeschwindigkeit $[1/\mathrm{s}]$
Menge $[\mathrm{X}]$	Zuwachsrate $[\mathrm{X}/\mathrm{s}]$
Energie $[\mathrm{Joule}]$	Leistung $[\mathrm{Watt}]$
el. Ladung $[\mathrm{Coulomb}]$	el. Strom $[\mathrm{Ampere}]$

Notation: $f' = \frac{df}{dx}$ oder $\dot{f} = \frac{df}{dt}$ wenn f Funktion von x bzw. t

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Ableitungen einiger wichtiger Funktionen ($\alpha \in \mathbb{R}$)

f	f'
$x \mapsto c$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto \alpha x$	$x \mapsto \alpha$
$x \mapsto x^\alpha$	$x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$
$\exp$	$\exp$
$\log$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$\sin$	$\cos$
$\cos$	$-\sin$

Beispiel:

Satz: (Summen- und Produktregel)
Sind $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar, so auch $f + g$ und αf für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

- $(f + g)' = f' + g'$ und
- $(\alpha f)' = \alpha f'$.

Im Fall $d = 1$ ist auch fg differenzierbar mit $(fg)' = f'g + g'f$.

Beweis:

Beispiel: Ableiten eines Polynoms

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dx} a_k x^k = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Satz: (Kettenregel)

Sind $g : [a, b] \to [c, d]$ und $f : [c, d] \to \mathbb{R}^d$ differenzierbar, dann ist die verkettete Funktion

$$h := f \circ g : \quad \begin{array}{ccc} [a, b] & \to & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$$

differenzierbar mit $h'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.

Beweisidee:

Beispiele:

- $(e^{-\lambda x})' = -\lambda\, e^{-\lambda x}$
- $\left(e^{-x^2}\right)' = -2x\, e^{-x^2}$

Ableitung der Umkehrfunktion:

Hat die Funktion $f : [a, b] \to [c, d]$ eine Umkehrfunktion f^{-1},

- so gilt $f(f^{-1}(x)) = x$.
- Mit der Kettenregel folgt $f'(f^{-1}(x)) \cdot f^{-1\prime}(x) = 1$

und damit

$$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \, .$$

(falls Nenner $\neq 0$)

So bestimmt man die Ableitungen von $\log, \arcsin, \arccos, \arctan$ aus denen von $\exp, \sin, \cos, \tan$.

Beispiel: $\log'$

Extrema: Oft möchte man für eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ wissen, wo sie ihr Maximum und ihr Minimum annimmt. Für Maximum oder Minimum sagt man auch Extremum.

Satz: Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und hat im Punkt $x \in (a, b)$, der nicht am Intervallende liegt, ein (lokales) Extremum, dann gilt $f'(x) = 0$.

Grund: Horizontale Tangente.

Umgekehrung gilt nicht: Sei $x \in (a, b)$. Wenn $f'(x) = 0$, muss nicht unbedingt ein Extremum vorliegen.

Beispiel: $f(x) = x^3$ hat $f'(x) = 3x^2$ mit Nullstelle bei $x = 0$, aber dort weder Maximum noch Minimum.

Allerdings: Wenn $f'(x) = 0$ **und** $f''(x) > 0$ (oder $f''(x) < 0$), dann hat f in x ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum), d.h. es gibt ein Intervall $[c, d] \subseteq [a, b]$ mit $x \in [c, d]$, so dass in x das eindeutige Minimum (bzw. Maximum) von f auf $[c, d]$ liegt.