Mathematik I für Biologen, Geowissenschaftler und Geoökologen

Mehrdimensionale Differenzialrechnung

Stefan Keppeler

19. Januar 2015

EBERHARD KARLS
UNIVERSITÄT
TÜBINGEN

Partielle Ableitungen

Richtungsableitungen

Totale Ableitung
- Tangentialebene
- ∇: Totale Ableitung / Gradient
- Richtungsableitungen und Gradient

Zweite Ableitungen
- Hesse-Matrix
- Lokale Extrema

Halten wir in der Funktion $f(x,y)$, d.h. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, die Variable y fest ("behandeln y als Zahl") und leiten dann (nach x) ab, so bilden wir die partielle Ableitung von f nach x,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$$

Bemerkung: $\dfrac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Umgekehrt:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

Beispiel: *Calc-zilla*

`http://abstrusegoose.com/26`

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; partielle Ableitung nach x_1 ist
  Ableitung in Richtung von $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}_1) - f(\vec{x})}{h}$$

- Richtungsableitungen in beliebiger Richtung:
  $\vec{e} \in \mathbb{R}^d$ mit $|\vec{e}| = 1$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{e}) - f(\vec{x})}{h} \qquad \left(=: \frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}) \right)$$

- Wie lassen sich Richtungsableitungen ohne Differenzialquotient berechnen?
  $\rightsquigarrow$ Tagential-Ebene (bzw. -Hyperebene)

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

- **Erinnerung:**
  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Tangente an der Stelle x_0:

  $$t_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

  (Lineare) Näherung, d.h. $f(x) \approx t_{x_0}(x)$, falls $|x - x_0|$ klein.

- Tangetial-(Hyper-)Ebene
  Lineare Näherung für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ falls $|\vec{x} - \vec{x}_0|$ klein:

  $$T_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + ? \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

  - ? sollte ein Vektor sein (& Punkt das Skalarprodukt), also

    $$T_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

  - ? sollte eine Ableitung sein
    $\rightsquigarrow$ Zusammenhang mit partiellen & Richtungs-Ableitungen?

- Tangente ist Gerade mit gleicher Steigung wie Funktion, d.h.

$$t'_{x_0}(x_0) = f'(x_0)$$

- Verlange analog

$$\frac{\partial T_{\vec{x}_0}}{\partial x_j}(\vec{x}_0) \stackrel{!}{=} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0)$$

- Daher gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} =: (\nabla f)(\vec{x}_0)$$

∇f = "Nabla f"
= "Gradient (von) f"
= "Totale Ableitung von f"

- Nochmal Tangentialebene

$$T_{\vec{x}_0}(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\nabla f)(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

- Richtungsableitung mithilfe der Tangentialebene:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}_0) = \frac{\partial T_{\vec{x}_0}}{\partial \vec{e}}(\vec{x}_0) =$$

  Also festgelegt durch Gradient

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}(\vec{x}_0) = (\nabla f)(\vec{x}_0) \cdot \vec{e}$$

- ∇f steht senkrecht auf den Höhenlinien des Graphs von f
- ∇f zeigt in die Richtung des stärksten Anstiegs von f

- $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ hat d erste partielle Ableitungen und
  d^2 zweite partielle Ableitungen

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f \,,$$

- die die sogenannte Hesse-Matrix H bilden. **Beispiel:** $f(x, y)$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

… z.B. für $x^2 + x \sin y$

Satz: Ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal partiell differenzierbar und sind die zweiten partiellen Ableitungen stetig, dann gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \,.$$

Folgerung: H ist dann eine symmetrische Matrix, $H^T = H$.

Satz:

- Hat die differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ in $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ ein (lokales) Minimum oder Maximum, so ist $\nabla f(\vec{x}) = 0$.
- Ist umgekehrt $\nabla f(\vec{x}) = 0$ und die Hesse-Matrix $H(\vec{x})$
  - positiv definit, so hat f in $\vec{x}$ ein lokales Minimum.
  - negativ definit, so hat f in $\vec{x}$ ein lokales Maximum.

Definition: Eine symmetrische Matrix $A \in \mathcal{M}(n,n)$ heißt

- positiv definit,
  wenn für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{x} \cdot (A\vec{x}) > 0$.
- negativ definit,
  wenn für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{x} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{x} \cdot (A\vec{x}) < 0$.