Messe Konzentration von z.B.

Na^+, Cl^-, NO_3^-, NO_2^-, HSO_4^-, Pb^{2+}, ...

in Zuflüssen & im Abfluss

$$\underline{Q_1} + \underline{Q_2} + \underline{Q_3} + \dots + \underline{Q_n} = Q_{ges}$$

$$c_1^{Na^+}\underline{Q_1} + c_2^{Na^+}\underline{Q_2} + \dots + c_n^{Na^+}\underline{Q_n} = c_{ges}^{Na^+} Q_{ges}$$

und für mindestens $n-2$ weitere Stoffe

gesucht: $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ gegeben: $c_{1,\dots,n}^{\dots}, c_{ges}^{\dots}, Q_{ges}$

D.h. n Gln. für n Unbekannte
(evtl. sogar noch mehr Stoffe / Glen)

Wie vielleicht gewünscht: $x_j = Q_j / Q_{ges}$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

$$c_1^{Nat} x_1 + \dots + c_n^{Nat} x_n = c_{ges}^{Nat}$$

$$\vdots$$

$$\Leftrightarrow \quad A \vec{x} = \vec{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ c_1^{Nat} & c_2^{Nat} & \cdots & c_n^{Nat} \\ \vdots & & & \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ c_{ges}^{Nat} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3 \end{array}\right) \quad \text{I} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -2/3 & -11/3 & -23/3 \end{array}\right) \quad -2 \quad 5$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 3/2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 37/12 & -37/6 & 37/3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \text{I} \cdot \frac{2}{3} \\ \text{I} \cdot \frac{12}{37} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3/4 & -1/2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ausgeschrieben:

$$x_1 + x_2 + \frac{3}{4}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 4$$
$$x_3 - 2x_4 = 4$$

wähle $\underline{x_4 = t} \in \mathbb{R}$ beliebig $\Rightarrow$ $\underline{x_3 = 4 + 2t}$

wähle $\underline{x_2 = s} \in \mathbb{R}$ beliebig $\Rightarrow$ $\underline{x_1} = 4 - s - \frac{3}{4}(4+2t) + \frac{t}{2}$

$$= \underline{1 - s - t}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - s - t \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 4 + 2t \\ x_4 &= t \end{aligned} \quad , \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

Do, 21 Uhr, Nikolaus, Alte Botanik

z.z. $L_{\vec{0}}$ ist Unterraum

- $L_{\vec{0}} \subseteq \mathbb{R}^n$ (LGS mit n Variablen)
- Seien $\hat{u}$ und $\hat{v}$ Lösungen des LGS, d.h.

$$A\hat{u} = \vec{0}, \quad A\hat{v} = \vec{0}$$

Ist auch $\alpha\hat{u} + \beta\hat{v}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig auch Lösung des LGS?

$$A(\alpha\hat{u} + \beta\hat{v}) = \alpha \cdot \underline{A \cdot \vec{u}} + \beta \cdot \underline{A\vec{v}} = \alpha\vec{0} + \beta\vec{0} = \vec{0}$$ ☺

---

z.z. $\vec{x} \in L_{\vec{b}} \iff \vec{x} = \hat{u} + \vec{y}, \quad \vec{y} \in L_0$

$\hat{u}$ war gegeben, als Lösung des inhomogenen Systems

"$\Leftarrow$": sei wahr: $\vec{u} \in L_{\vec{b}}$, $\vec{y} \in L_{0}$

$$\underline{A\vec{x}} = A(\vec{u}+\vec{y}) = A\vec{u} + A\vec{y} = \vec{b} + \vec{0} = \underline{\vec{b}}$$

d.h. $\vec{x} \in L_{\vec{b}}$ ☺

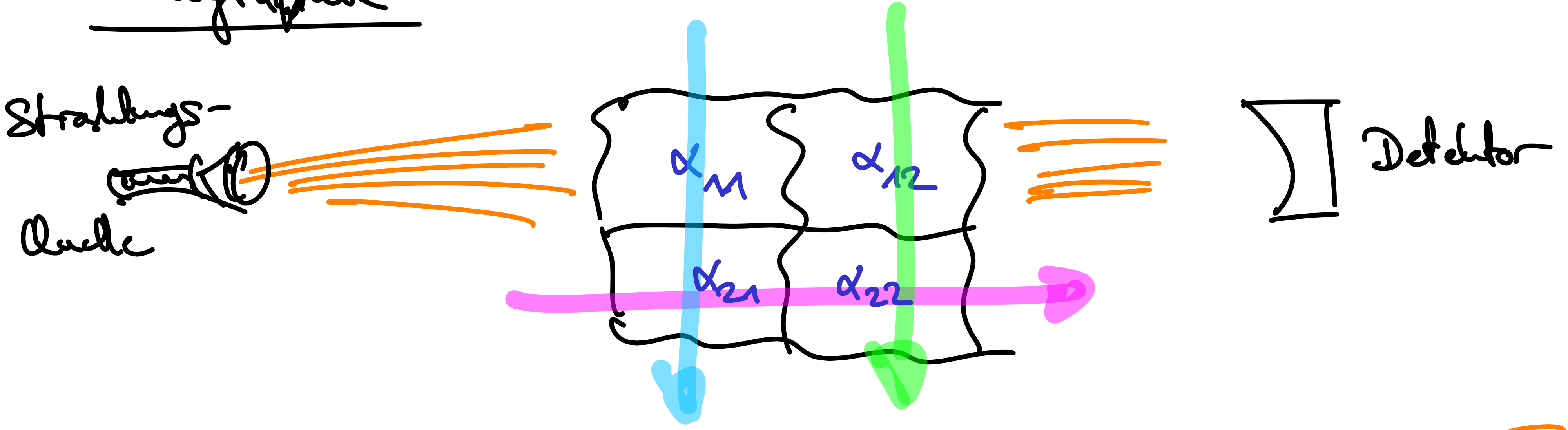
"$\Rightarrow$": sei wahr: $\vec{x} \in L_{\vec{b}}$ und $\vec{u} \in L_{\vec{b}}$

$\vec{x} \in L_{\vec{b}} \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{b}$, $\quad \vec{y} := \vec{x} - \vec{u}$

$$\underline{A\vec{y}} = A(\vec{x}-\vec{u}) = A\vec{x} - A\vec{u} = \vec{b} - \vec{b} = \underline{\vec{0}}$$

d.h. $\vec{y} \in L_{\vec{0}}$ ☺

Tomographie



Intensität $I_0 \longrightarrow I = \alpha_{11}\cdot\alpha_{12}\cdot I_0$

gemessen $\rightarrow$ $A_1 = \dfrac{I_0}{I_1} = \alpha_{11}\cdot\alpha_{12}$ $\leftarrow$ gesucht

, , : weitere solche Glen. für Produkte von αs

Logarithmieren: $\log A_1 = \log \alpha_{11} + \log \alpha_{12}$

$\rightsquigarrow$ LGS für $\log \alpha_{11}, \dots, \log \alpha_{22}$

s_A = # Schwestern von Anton

s_B = # — " — Berta

b_A = # Brüder von Anton

b_B = # — " — Berta

$$\left.\begin{aligned} s_A &= s_B + 1 \\ b_B &= b_A + 1 \end{aligned}\right\} \text{"sind Geschwister"}$$

$$s_A = 2 b_A$$

$$s_B = b_B$$

LGS mit 4 Glgn. für 4 Unbekannte

(...) 7 Kinder